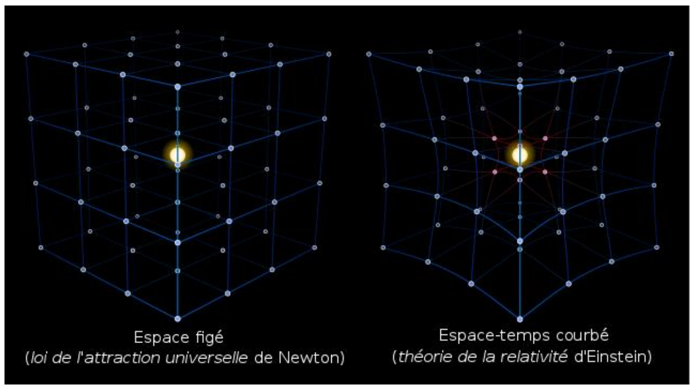
Fiche CU2 – Relativité générale (RG)

- **Contexte** de la **relativité générale** (« **RG** »)

La **mécanique newtonienne évalue** la **cinématique** et la **dynamique** d'un **objet soumis** à des **forces extérieures**. La **RR explique** les **lois** de **passage** d'un **référentiel** à un **autre** en **mouvement relatif**. La **contradiction** entre **gravitation newtonienne** et **principes fondamentaux** de la **relativité restreinte** pour l'**espace-temps** a fait **émerger** la **RG**.

© commons.wikimedia.org – Gadarensis ↓



Principe de **Mach**

L'**inertie** des **objets matériels** serait **induite** par « l'**ensemble** des **autres masses présentes** dans l'**univers** », par une **interaction non spécifiée**. Ce **principe** a été forgé par **extension** du **principe** de **relativité** aux questions d'**inertie** : pour **Mach**, il **n**'y a **pas** d'**accélération** ou de **rotation** par rapport à un **espace absolu** mais une **accélération** par rapport à des **masses lointaines**.

Principe d'**équivalence** d'**Einstein**

La **structure** de l'**espace-temps** est **généralisée** en **RG** de par ce **principe issu** de l'**universalité** de la **chute libre** :
En **tout point** d'**espace-temps**, on peut **choisir** un **système** de **coordonnées localement inertiel** tel que, dans une **région suffisamment petite**, les **lois** de la **physique** ont la **même forme** que **celles** d'un **système** de **coordonnées cartésiennes non-accéléré** en l'**absence** de **gravitation**. Ainsi, les **lois**, dans ces **référentiels inertiels**, sont **localement lorentziennes** comme en **relativité restreinte**.

Principe de **covariance généralisé** et **formulation covariante** des **équations**

Les **lois** s'**écrivent identiquement quel que soit** le **référentiel choisi**.
Elles sont **invariantes** sous les **changements** de **coordonnées** de l'**espace-temps**.
Les **difféomorphismes** de l'**espace-temps** étant le **groupe** de **jauge** de la **relativité générale**, les **quantités physiques observables** doivent être **invariantes** par

difféomorphismes. En **RR**, l'**utilisation** de **tenseurs** permet d'**obtenir** des **équations covariantes**. En **RG** la **notion** de **tenseur** est **étendue**.

- **Tenseur** **4 × 4** d'**énergie – impulsion** de la **masse** et l'**énergie** dans l'**espace-temps**.
  $\mathbf{T_{00}}$: **densité** d'**énergie**, Pour **i** = **1**, **2**, **3** : $\mathbf{T_{i0}}$: **densité** de l'**impulsion suivant i**,
  $\mathbf{T_{ii}}$: **pression** sur une **surface unité** de **vecteur dirigé** par **i**,
  $\mathbf{T_{0i}}$: **flux** d'**énergie** à travers une **surface unité** de **vecteur dirigé** par **i**.

- **Équations** d'**Einstein**

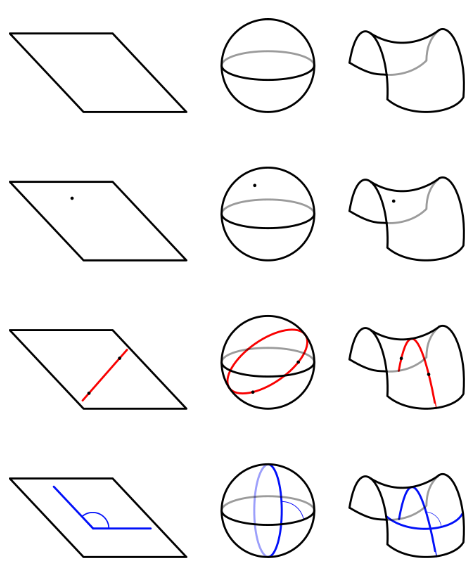
  Équation dynamique décrivant comment la **matière** et l'**énergie modifient** la **géométrie** de l'**espace-temps**. La **courbure** de la **géométrie autour** d'une **source** de **matière** est alors **vue** comme son **champ gravitationnel**. Le **mouvement** des **objets** dans ce **champ** est **décrit** par l'**équation** de sa **géodésique**.

  Espace-temps courbe

  Le **champ gravitationnel n**'est **pas uniforme** et **deux référentiels** infiniment proches **diffèrent** comme le **système** de **coordonnées localement inertiel**. L'**espace-temps** a une **courbure due** à ce **champ gravitationnel**. Les **astres** (masses, dynamiques) de l'**univers** et la **courbure** de l'**espace-temps** sont **interactifs**. La **dynamique** des **systèmes** devant être **vérifiée** dans **tous référentiels,** les **équations** d'**Einstein** sont **tensorielles**. La **mesure** d'une **distance** entre **deux points** de l'**espace-temps** est **calculée** via la **métrique** $\mathbf{g_{\mu\nu}}$ **variant** selon la **position**, **formant** une **variété pseudo-riemannienne**, qui, d'après la **RR**, **possède 4 dimensions** avec une **métrique** de **signature (−, +, +, +)** (**variété lorentzienne**). $\mathbf{g_{\mu\nu}}$ **décrit** les **propriétés métriques** et **causales** de l'**espace-temps** et aussi le **champ gravitationnel**. C'est donc un **élément dynamique**, **explicité** par les **équations** d'**Einstein**, qui **définit** le **tenseur** de **courbure** de l'**espace-temps** et le **tenseur énergie-impulsion** en **matière** et **énergie** de l'**univers**.

© commons.wikimedia.org – Absolute_geometry_el, Marek M ↓

Éléments géométriques pour **espaces respectivement plat**, à **courbure positive**, à **courbure négative**.



- **Tenseur** de **torsion**

Avec **celui** de **courbure**, **il** permet d'**évaluer** comment une **base mobile évolue** le **long** des **courbes**, comme dans le **cadre** des **variétés**.
Pour une **courbe assimilée** au **cercle osculateur**, la **torsion signifierait** l'**intensité** d'**extraction** du **plan** de ce **cercle** en **vrillant**. Le **tenseur** de **torsion**, **champ tensoriel**, concerne les **variétés différentielles munies** d'une **connexion D**. **Il** est **défini** par :
$\mathbf{T}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) := \mathbf{D_X Y} - \mathbf{D_Y X} - [\mathbf{X},\mathbf{Y}]$, où $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ est le **crochet** de **Lie** des **champs** de **vecteurs X** et **Y**. La **connexion** est dite **sans torsion** quand ce **tenseur** est **constamment nul** comme la **connexion** de **Levi-Civita** en **géométrie riemannienne**.

- **Tenseur** de **Riemann**

Le **tenseur** de **courbure** de **Riemann-Christoffel** $\mathcal{R}$ **exprime** la **courbure** de **variété riemannienne**, ou de **celle munie** d'une **connexion affine**, **avec** ou **sans torsion**.
Pour **deux géodésiques** d'un **espace courbe**, **parallèles** au **voisinage** d'un **point P**,
le **tenseur** de **courbure** de **Riemann** indique l'**évolution** de l'**écart** entre **celles-ci** et plus l'**espace** est **courbe**, plus elles se **rapprochent** ou s'**éloignent rapidement**.
Le **tenseur** de **courbure** $\mathcal{R}$ s'**exprime** avec une **connexion affine** ou de **Levi-Civita** $\boldsymbol{\Gamma}$ de sorte que, pour tous **champs** de **vecteurs u**, **v** et **w** de la **variété M** :
$\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{v})\mathbf{w} := \nabla_\mathbf{u}\nabla_\mathbf{v}\mathbf{w} - \nabla_\mathbf{v}\nabla_\mathbf{u}\mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}\mathbf{w}$, où $[.,.]$ est le **crochet** de **Lie**.
$\mathcal{R}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ est une **transformation linéaire** sur l'**espace tangent** de la **variété**.
Pour une **métrique** $\mathbf{g_{ij}}$ **définie**, les **symboles** de **Christoffel** (**connexion affine**) sont :
$\Gamma^{i}_{kl} = \frac{1}{2}\sum_m g^{im}\left(g_{mk;\,l} + g_{ml;\,k} - g_{kl;\,m}\right)$ où $g_{ik;\,l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{l}}$.
Le **tenseur** de **courbure** (**Riemann**) est : $R^{\sigma}_{\mu\nu\gamma} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\gamma;\,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu;\,\gamma} + \sum_\lambda \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.
Tenseur de **Ricci**
C'est un **tenseur** de **rang 2**, **symétrique**, **trace** du **tenseur** de **courbure complet**.
Il s'**assimile** au **laplacien** du **tenseur métrique riemannien** pour les **variétés riemanniennes**. **Contraction** du **tenseur** de **courbure** de **Riemann** : $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\alpha}$.
Courbure scalaire, **scalaire** de **Ricci**
En **géométrie riemannienne**, la **courbure scalaire mesure** la **courbure** d'une **variété riemannienne**. Cet **invariant riemannien** est en effet une **fonction** qui pour **chaque point** de la **variété** fournit un **nombre réel R y évaluant** la **courbure intrinsèque**.
En **4D** et **plus**, d'**autres invariants** sont **nécessaires** à la **mesure**.
Elle est la **trace** du **tenseur** de **Ricci relativement** à la **métrique** : $\mathbf{R} = \mathbf{g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}$.

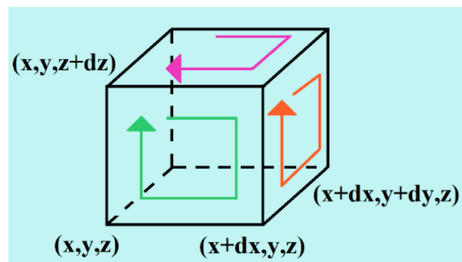
- **Tenseur** et **transformation** de **Weyl**

Partie du **tenseur** de **Riemann sans trace** pour une **dimension** d'**espace n** :
$\mathbf{C_{\alpha\beta\gamma\delta}} = \mathbf{R_{\alpha\beta\gamma\delta}} - (\mathbf{1}/(\mathbf{n}-\mathbf{2}))\left(\mathbf{R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}} - \mathbf{R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}} + \mathbf{R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma}} - \mathbf{R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta}}\right) + (\mathbf{1}/(\mathbf{n}-\mathbf{1})(\mathbf{n}-\mathbf{2}))\left(\mathbf{g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}} - \mathbf{g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}}\right)\mathbf{R}$. *On a bien* $\boldsymbol{C^{\gamma}_{\mu\nu\gamma}} = \mathbf{0}$.
Une **transformation** de **Weyl**, **mise** à l'**échelle locale** du **tenseur métrique** $\mathbf{g_{\alpha\beta}} = \mathbf{e^{-\omega(x)}g_{\alpha\beta}}$ qui **produit** une **autre métrique** dans la **même classe conforme**, **laisse** le **tenseur** de **Weyl** et la **connexion** de **Weyl** ***(pas de Levi-Civita)*** **invariants**.

- **Tenseur** de **courbure** et **métrique**

  Soit une **variété affine M** de **dimension n** : **variété munie** d'une **connexion affine** ∇.
  On **obtient** le **tenseur** de **courbure**, ou **tenseur** de **Riemann**, $\mathcal{R}$, d'après cette **connexion définie** pour **u**, **v** et **w**, **champs** de **vecteurs** sur la **variété** avec :
  $\mathcal{R}(u,v)w := \nabla_u\nabla_v w - \nabla_v\nabla_u w - \nabla_{[u,v]}w,$
  On **munit** la **variété affine M** d'un **tenseur métrique g** : (M,g) est alors une **variété riemannienne**, et on peut **définir** une **courbure** à **valeurs réelles** par :
  $\mathcal{R}(u,v,w,z) = g(\mathcal{R}(u,v)w,z) = g_{\mu\alpha}R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}u^{\nu}v^{\rho}w^{\sigma}z^{\alpha} = z_{\mu}R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}u^{\nu}v^{\rho}w^{\sigma}.$
  *En prenant sa **trace** (par rapport à u, v), on **obtient** le **tenseur** de **courbure** de **Ricci**, dont la **trace**, à nouveau, **donne** la **courbure scalaire**, **fonction** de $M \to \mathbb{R}$.*

- **Identités** de **Bianchi** ***(Rappel)***

  $R_{\mu\nu\rho\sigma\,;\,\tau} + R_{\mu\nu\tau\rho\,;\,\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\tau\,;\,\rho} = 0$. En **déplaçant parallèlement** le **vecteur A** le **long** d'**une** des **faces** du **cube élémentaire** suivant l'**une** des **flèches colorées**, **il** est **modifié** de δA. Pour la **face** en $x + dx$ *(contour fléché orange)*,
  $-\delta A^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta yz}(x + dx)A^{\beta}dydz$. La **face opposée** en **x**, $-\delta A^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta yz}(x)A^{\beta}dydz$.
  La **somme** des **deux donne** : $\dfrac{\partial R^{\alpha}{}_{\beta yz}}{\partial x}A^{\beta}dxdydz = R^{\alpha}{}_{\beta yz,x}A^{\beta}dxdydz$.
  De **même** pour les **autres faces** et on **obtient** : $\delta A^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta yz,x} + R^{\alpha}{}_{\beta zx,y} + R^{\alpha}{}_{\beta xy,z}$.
  A parcourant les **six faces**, **chaque arête** est **parcourue une fois** dans **un sens**, et **une fois** dans l'**autre**, le **tenseur** de **Riemann linéaire**, leurs **contributions** s'**annulent** donc **deux** à **deux** et $\delta A = 0$ pour un tel **parcours**.
  On **obtient** : $R_{\mu\nu\rho\sigma,\tau} + R_{\mu\nu\tau\rho,\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\tau,\rho} = 0$, puis $R_{\mu\nu\rho\sigma;\,\tau} + R_{\mu\nu\tau\rho;\,\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\tau;\rho} = 0$ par **passage** aux **dérivées covariantes** car en **coord. normales** de **Riemann** les $\Gamma = 0$.

- **Équation** d'**Einstein** **(Ein)**

  Équation fondamentale de la **RG**, **elle** est **tensorielle** et **généralise** l'**équation** de **Poisson**, **forme locale** de la **loi** de la **gravitation universelle** de **Newton** *(Cf. **PC1**)*. **en reliant** par **proportionnalité** les **tenseurs** (**covariants**, **symétriques** de **rang 2** dans la **variété 4D** de l'**espace-temps**) : **géométrique** d'**Einstein**, $R_{\mu\nu}$, à **celui** de l'**énergie-impulsion**, $T_{\mu\nu}$. **Elle comprend** un **ensemble** d'**équations différentielles** aux **dérivées partielles non-linéaires** du **second ordre** et s'**exprime** avec **10 équations scalaires** dans un **système** de **coordonnées locales défini**. La **première identité** de **Bianchi réduit** de **4** ces **équations** dans ce **système**. L'**équation** d'**Einstein induit** donc **6 équations indépendantes**. La **constante cosmologique**, Λ, fut **introduite** pour **permettre** des **solutions statiques** au **modèle cosmologique**.
  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu} = \chi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) + \Lambda g_{\mu\nu}$. *où* $\chi = \dfrac{8\pi G}{c^4}$.

- **Établissement** de l'**équation** d'**Einstein**

  Des **identités** de **Bianchi** : $\mathbf{R_{\mu\nu\rho\sigma\,;\,\tau} + R_{\mu\nu\tau\rho\,;\,\sigma} + R_{\mu\nu\sigma\tau\,;\,\rho} = 0}$, on **déduit** :
  $\mathbf{g^{\alpha\beta}\left(D_\rho R_{\alpha\mu\nu\beta} + D_\nu R_{\alpha\mu\beta\rho} + D_\beta R_{\alpha\mu\rho\nu}\right) = 0}$.
  $\mathbf{D_\rho g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\nu\beta} + D_\nu g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\rho} + D_\beta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\rho\nu} = 0}$,
  avec $\mathbf{g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\nu\beta} = R_{\mu\nu}}$, $\mathbf{g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\rho} = -R_{\mu\rho}}$, $\mathbf{g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\rho\nu} = R^{\beta}{}_{\mu\rho\nu}}$.
  On a donc également : $\mathbf{g^{\mu\rho}\left(D_\rho R_{\mu\nu} - D_\nu R_{\mu\rho} + D_\beta R^{\beta}{}_{\mu\rho\nu}\right) = 0}$,
  et avec de même $\mathbf{g^{\mu\rho} R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\nu}}$, $\mathbf{g^{\mu\rho} R_{\mu\rho} = R}$, $\mathbf{g^{\mu\rho} R^{\beta}{}_{\mu\rho\nu} = R^{\beta}{}_{\nu}}$, on **obtient** :
  $\mathbf{D_\rho R^{\rho}{}_{\nu} - D_\nu R + D_\beta R^{\beta}{}_{\nu} = 0}$, où $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\beta}$: **indices muets**, on peut alors **écrire** :
  $\mathbf{2D_\rho R^{\rho}{}_{\nu} - D_\nu R = 0}$, puis $\mathbf{g^{\nu\gamma}\left(2D_\rho R^{\rho}{}_{\nu} - D_\nu R\right) = 0 \rightarrow 2D_\rho R^{\gamma\rho} = D_\nu (g^{\nu\gamma} R)}$.
  Donc, $\mathbf{D_\nu R^{\mu\nu} = (1/2) D_\nu (g^{\nu\mu} R)}$, et par **symétrie** de $\mathbf{g^{\mu\nu}}$, $\mathbf{D_\nu G^{\mu\nu} = 0}$, où le **tenseur** d'**Einstein**, $\mathbf{G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - (1/2) g^{\mu\nu} R}$ s'**écrit** alors nécessairement : $\mathbf{G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}}$.
  Par **contraction** de cette **relation**, $\mathbf{-R = \kappa T}$, puis $\mathbf{R^{\mu\nu} = \kappa(T^{\mu\nu} - (1/2) g^{\mu\nu} T)}$
  La **constante réelle** $\boldsymbol{\kappa}$ se **détermine** pour une **distribution statique** de **matière**, d'un **champ faible**, de **potentiel** $\mathbf{V(\vec{r})}$, ayant $\mathbf{g_{00} = 1 + 2V(\vec{r})/c^2}$, on **obtient** :
  $\mathbf{R^{\mu}{}_{00\mu} = (1/c^2)\vec{\nabla}^2 V(\vec{r}) = (1/2)\kappa\rho c^2}$. **Cela** s'**assimile** à l'**équation** de **Poisson** de la **gravitation newtonienne** : $\mathbf{\vec{\nabla}^2 V(\vec{r}) = 4\pi G\rho}$. D'où, $\mathbf{\kappa = 8\pi G/c^4}$.

- **Ondes gravitationnelles** **décrites** avec $\mathbf{g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}}$ et **d'Alembertien** « □ » :
  $\mathbf{\square h_{\mu\nu} = 0}$. ***Elles résolvent*** *en effet l'****équation*** *d'****Einstein*** *dans le* ***vide***, $\boldsymbol{R_{\mu\nu} = 0}$.

- **Métriques** : **invariant infinitésimal** de la **variété différentielle représentant** la **géométrie** de l'**espace-temps physique**. $\boldsymbol{ds^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$.
  – de **Schwarzchild** *(****décrivant*** *le* ***champ gravitationnel*** *dans un* ***espace vide*** *à l'****extérieur*** *d'une* ***masse sphérique sans rotation*** *et* ***non chargée****)* :
  $\mathbf{ds^2 = (1 - 2GM/r)dt^2 - (1 - 2GM/r)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2}$.
  – de **Friedmann**-**Lemaître**-**Robertson**-**Walker** *(****FRW****)(décrivant un* ***espace-temps homogène*** *et* ***isotrope****. Utilisé pour le* ***modèle cosmologique standard*** *de l'****univers****)* :
  $\mathbf{ds^2 = dt^2 - R^2(t)(dr^2/(1 - kr^2) - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2)}$, *où la* ***courbure k*** *vaut :* ***0 : géométrie euclidienne (relativité restreinte), – 1 : hyperbolique****,* ***1 : sphérique****.*

- **Détermination** de la **métrique** de **Schwarzchild** ***(métrique simple*** *de* ***trou noir)***

  On **déduit** des **équations** d'**Einstein** (Ein) autour d'une **masse ponctuelle** pour une **gravitation isotrope** et **permanente**, l'**expression** de la **métrique** de **Schwarzchild** :
  $\mathbf{d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2}$, ($\mathbf{d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2}$). On **note A(r)** : **A** et **B(r)** : **B** et pour **r** → ∞, la **métrique** de l'**espace plat** de **Minkowski** est **effective** :
  $\mathbf{1/A = B = 2GM/c^2 r - 1}$ puis $\mathbf{d\tau^2 = (1 - r_g/r)dt^2 - (1 - r_g/r)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2}$,
  avec le **rayon** de **Schwarzchild**, $\mathbf{r_g = 2GM/c^2}$. *Pour* $\boldsymbol{M = 2 \times 10^{30}\ kg}$, $\boldsymbol{r_g = 3\ km}$.
  $\mathbf{T_{\mu\nu} = 0 \rightarrow R_{\mu\nu} = 0} \rightarrow R_{rr} = R_{\theta\theta} = R_{\varphi\varphi} = R_{tt} = 0$. $R_{rr} = R_{tt} = 0 \rightarrow$ **AB = 1** car pour **r** → ∞ : **métrique** de **Minkowski** (A → 1, B → 1). Avec $r_g = 2GM/c^2$, $R_{\theta\theta} = 0$
  $\rightarrow -1 + 1/A + (r/2A)(B'/B - A'/A) = 0 \rightarrow B = 1 + B_0/r$, avec B_0 cste / $g_{00} = -B$
  $\mathbf{g_{00}} = -g_{tt} = \mathbf{1 - 2GM/c^2 r \rightarrow d\tau^2 = (1 - r_g/r)dt^2 - (1 - r_g/r)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2}$.

- **Détermination** de la **métrique FRW** : $\mathbf{d\tau^2 = dt^2 - Udr^2 - V(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}$, $\mathbf{R_{\mu\nu} = -\chi S_{\mu\nu}}$. Pour $\mathbf{P = 0}$, $\mathbf{S_{\mu\nu} = \rho\left(u_\mu u_\nu + (1/2)g_{\mu\nu}\right)}$ → Avec **k** : **cste** de **courbure**, $\mathbf{d\tau^2 = dt^2 - R^2(t)d\sigma^2}$, $\mathbf{d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}$ *car* $\left(" \cdot " : \frac{\partial}{\partial t}, " \, ' \, ": \frac{\partial}{\partial r}\right)$:
$R_{rr} = \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} - \frac{\ddot{U}}{2} + \frac{\dot{U}^2}{4U} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2V}$, $R_{\theta\theta} = -1 + \frac{V''}{2U} - \frac{U'V'}{4U^2} - \frac{\ddot{V}}{2} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{4U}$,
$R_{tt} = \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{V'^2}{2V^2}$, $R_{tr} = \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{V'\dot{V}}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV}$, $R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta}\sin^2\theta$. $S_{it} = 0 \to R_{it} = 0$
$\to \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{V'\dot{V}}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} = 0$. *Univers homogène isotrope → Principe cosmologique* (***CU4***) *:*
$U = R^2(t)f(r)$, $V = S^2(t)g(r) \to \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{S}}{S} \to U = R^2(t)f(r)$, $V = S^2(t)r^2$.
Dans un système de coordonnées comobiles standard : $u^1 = 0$, $u^t = 0 \to S_{rr} = \rho U/2$, $S_{\theta\theta} = \rho V/2$, $S_{\varphi\varphi} = S_{\theta\theta}\sin^2\theta$, $S_{tt} = \rho U/2$. $R_{rr} = -8\pi G S_{rr} \to -\frac{f'}{rf^2} - \ddot{R}R - 2\dot{R}^2 = -4\pi G\rho R^2$. $R_{\theta\theta} = -8\pi G S_{\theta\theta} \to -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 f} - \frac{f'}{2rf^2} = \ddot{R}R + 2\dot{R}^2 - 4\pi G\rho R^2$.
$-\frac{f'}{rf^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 f} - \frac{f'}{2rf^2} = -2k \to -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 f} = -k \to \boldsymbol{f(r) = \frac{1}{1-kr^2}}$.

- **Autre métriques** $(\boldsymbol{c = 1})$

  – **anisotrope**, de **Kasner** : $\mathbf{ds^2 = dt^2 - K_1t^{2p_1}dx^2 - K_2t^{2p_2}dy^2 - K_3t^{2p_3}dz^2}$, *où* $\boldsymbol{p_1 + p_2 + p_3 = p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2 = 1}$. ***correspond*** *à un* ***univers*** *de* ***sections spatiales homogènes*** *: c'est une* ***métrique*** *d'****espace-temps 4D spatialement homogène****.*
  – de **Kottler** : $\mathbf{ds^2 = -(1 - R_S/r - \Lambda r^3/3)dt^2 + (1 - R_S/r - \Lambda r^2/3)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}$.

- **Espace** autour d'une **masse sphérique** de **masse M**

  La **métrique** de **Schwarzchild** permet de **décrire** la **déformation** de l'**espace-temps** dans le **vide** autour d'une **masse sphérique**. Pour $\mathbf{x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)}$

$$(\mathbf{g_{\mu\nu}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1 - 2GM/rc^2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-(1 - 2GM/rc^2)^{-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-r^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}.$$

  La **métrique** de **Kerr** est **spécifique** aux **trous noirs** et **ne** s'**applique pas** à d'autres **corps** en **rotation**. Avec à nouveau un **référentiel sphérique** de l'**espace-temps**, pour $\mathbf{x^\mu = (t, r, \theta, \phi)}$ *(on prend* $c = 1$*)*, $\mathbf{\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta}$, $\mathbf{\Delta = r^2 - 2Mr + a^2}$.
  Métrique de **Kerr**, **décrit** la **déformation** de l'**espace-temps** dans le **vide**

$$(\mathbf{g_{\mu\nu}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1 - \frac{2Mr}{\Sigma}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{4aMr\sin^2\theta}{\Sigma}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-\Sigma/\Delta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{4aMr\sin^2\theta}{\Sigma}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta} \end{pmatrix}.$$

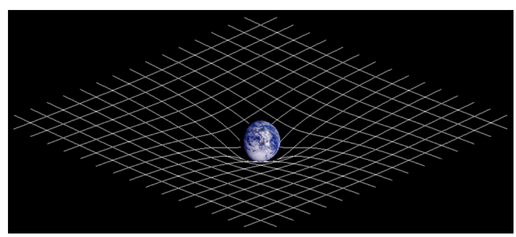
- **Équations** de **Friedmann-Lemaître**

Solutions homogènes et **isotropes** pour l'**équation** du **mouvement** du **fluide cosmologique** *(**ρ** et **p** ne **dépendent** ainsi que du **temps cosmique t**).*
Comme $\mathbf{u^{\mu}u^{\mu} = c^2}$, $\mathbf{T = T^{\mu}_{\mu} = (\rho + p/c^2)c^2 - p\delta^{\mu}_{\mu} = (p + \rho c^2) - 3p}$.
Équations d'**Einstein** en **présence** de **matière** avec ou sans **constante cosmologique**.
→ **Équations** de **Friedmann** $(\mathbf{\Lambda = 0})$, **équations** de **Friedmann-Lemaître** $(\mathbf{\Lambda \neq 0})$
$\mathbf{\ddot{R} = 4\pi G(\rho/3 + p/c^2)R + (\Lambda c^2/3)R}$, $\mathbf{\dot{R}^2 = 8\pi G(\rho/3)R^2 + (\Lambda c^2/3)R^2 - kc^2}$.
On peut les **réécrire** avec le **paramètre** de **Hubble** $\mathbf{H := \dot{R}/R}$, $\mathbf{K := k/a}$ pour $\mathbf{\Lambda = 0}$:
$\mathbf{3(H^2/c^2 + K/a^2) = (8\pi G/c^2)\rho}$ et $\mathbf{2\dot{H}/c^2 + 3H^2/c^2 + K/a^2 = (-8\pi G/c^4)P}$.
Équations du **mouvement** d'après la **conservation** du **tenseur** – **impulsion** :
$\mathbf{\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0}$. $\mathbf{\nabla_{\mu}(\rho u^{\mu}) = 0}$.

- **Géodésiques** *(**trajets minimaux** entre **deux points** dans un **espace métrique courbe E**)*

Les **coordonnées** $\mathbf{x}^{k = 0, 1, 2, 3}$ d'un **repère** de **E** de **tenseur métrique** $\mathbf{g_{ij}}$, **définissant** le **produit scalaire** entre **deux** de ses **vecteurs** : $\mathbf{ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j}$ *(**somme** sur les **i**, **j** toujours sous-entendue).* L'**équation** des **géodésiques** (dans une telle « **variété riemannienne** ») d'un **corps** en **mouvement correspond** à la **minimalisation** continuelle de sa **distance parcourue** : $\mathbf{L = \int ds}$ *(↔ **droite** si **pas** de **masse**).*

$\mathbf{L = \int \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j} = \int \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}}\,d\tau}$.
$\mathbf{\delta S = 0}$ → **équations** de **Lagrange**
$\mathbf{\forall k,\ \frac{\partial\dot{s}}{\partial x^k} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\dot{s}}{\partial\dot{x}^k}\right) = 0}$.
*avec les **symboles** de **Christoffel**,*



© commons.wikimedia.org – Johnstone

$\boldsymbol{\Gamma^i_{kl}} = \frac{1}{2}\sum_m g^{im}(g_{mk;\,l} + g_{ml;\,k} - g_{kl;\,m})$, *où* $g_{ik;\,l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$: $\mathbf{\forall k,\ \ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j = 0}$.
*Le **tenseur** de **courbure** (**Riemann**) est :* $\boldsymbol{R^{\sigma}_{\mu\nu\gamma} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\gamma;\,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu;\,\gamma} + \sum_{\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}$.

- **Singularité nue**

En **RG**, une **singularité nue** est une **singularité gravitationnelle non cachée** derrière un **horizon** des **événements contrairement** à **celle** à l'**intérieur** d'un **trou noir**, **cachée** par l'**horizon** d'où la **force gravitationnelle courbe tellement** l'**espace-temps** que même la **lumière ne** peut s'en **échapper**. Une **singularité nue**, elle, **n**'est **observable** que de l'**extérieur** et **solution** de l'**équation** d'**Einstein**, avec la **métrique** de **Kerr** et de **celle** de **Reissner-Nordström** *(**corps** de **masse M** et **charge électrique Q**)* :
$\mathbf{ds^2 = \left(1 - r_S/r + (r_Q/r)^2\right)dt^2 - \left(1 - r_S/r + (r_Q/r)^2\right)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2}$,
où le **rayon** de **Schwarzchild**, $\mathbf{r_S = 2GM/c^2}$, $\mathbf{r_Q = GQ^2/4\pi\varepsilon_0 c^4}$ *(Cf. **CU2**).*
La **conjecture** de **censure cosmique impose celle** du **big bang** comme la **seule**.

- **Champ** de **cadre** (« **tétrade** »)

C'est un **ensemble** de **4 champs** de **vecteurs orthonormés unitaires ponctuels**, **3 spatiaux** et **1 temporel**, **définis** sur une **variété lorentzienne modélisant** l'**espace-temps**. Le **champ** de **vecteurs temporels** est **noté** $\vec{e}_0$, les **3 spatiaux**, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.
Toute **grandeur tensorielle définie** sur la **variété** peut s'**écrire** selon le **champ** de **tétrades** et de son **champ** de **cotétrades dual**.
Toute **tétrade correspond** à un **observateur** dans l'**espace-temps** pour **lesquels**, les **courbes intégrales** du **champ** de **vecteurs temporels** sont ses **lignes** d'**univers** et à chaque **événement** le **long** d'une **ligne** d'**univers**, les **3 champs** de **vecteurs unitaires spatiaux forment** la **triade spatiale portée** par cet **observateur**.
La **triade définit** ainsi les **axes** de **coordonnées spatiales** d'un **cadre** d'**étude local existant infiniment près** de la **ligne** d'**univers** de l'**observateur**.
Les **cadres** sont des **objets géométriques** : les **champs vectoriels** sont **définis** (dans une **variété lisse)** et (dans une **variété lorentzienne**), l'**orthogonalité** et la **longueur** également. Ainsi, tout comme les **champs vectoriels** et autres **grandeurs géométriques**, les **champs** de **trame** peuvent être **représentés** dans de **multiples ensembles** de **coordonnées**. Les **calculs** des **composantes** des **grandeurs tensorielles**, par rapport à un **repère** donné, sont **préservés quel que soit** l'**ensemble** de **coordonnées** utilisé pour le **représenter**. Ces **champs** sont **nécessaires** pour **écrire** l'**équation** de **Dirac** dans un **espace-temps courbe**. Tout **champ vectoriel** sur la **variété** s'**exprime** comme **combinaison linéaire** des **4 champs vectoriels** de **base** de **coordonnées** : $\vec{X} = X^\mu \partial_{x^\mu} = X^\mu \partial_\mu$. les **champs vectoriels** sont des **opérateurs différentiels linéaires** du **premier ordre**, ainsi, $\vec{e}_a = e_a{}^\mu \partial_\mu$.
La **métrique** de l'**espace-temps** comme le **produit extérieur** des **vecteurs tangents** de **coordonnées** : $g_{\mu\nu} = g_\mu . g_\nu$ et la **métrique** de **Minkowski** à **espace plat** comme **produit** des **gammas** : $\eta_{\mu\nu} = \gamma_\mu . \gamma_\nu$.

- **Expression** de la **RG** et la **connexion** de **spin** avec les **tétrades** *(Cf.* ***CU3****)*

Par **application** du **principe** d'**équivalence généralisé**, en **tout point M** de l'**espace-temps**, il **existe** un **référentiel annulant** le **champ** de **gravitation** (**tangent**, **inertiel**), $\mathcal{R}_0(M)$ et où la **relativité restreinte** s'**applique**. Les **coordonnées mesurées** dans $\mathcal{R}_0(M)$ sont **notées** x^a, **celles** d'un **référentiel**, $\mathcal{R}$, où la **gravitation** est **considérée** : χ^μ. Le **tenseur métrique** dans $\mathcal{R}$ est $g_{\mu\nu}$, d'**inverse** $g^{\mu\nu}$ tel que $g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_\mu{}^\nu$.
Les **tétrades** sont **définies** par $e^\mu{}_a := \frac{\partial \chi^\mu}{\partial x^a}$, $e_\mu{}^a = \frac{\partial x^a}{\partial \chi^\mu}$. On a $e^\mu{}_a e_\mu{}^b = \delta_a{}^b$, $e^\mu{}_a e_\nu{}^a = \delta^\mu{}_\nu$, $e^\mu{}_a(x) e^\nu{}_b(x) g_{\mu\nu}(\chi) = \eta_{ab}$, $e_\mu{}^a(\chi) e_\nu{}^b(\chi) \eta_{ab} = g_{\mu\nu}(\chi)$, $e^\mu{}_a(x) = e_\nu{}^b(\chi) g^{\mu\nu}(\chi) \eta_{ab}$, avec les **passages** entre **référentiels** $\mathcal{R}_0(M)$ et $\mathcal{R}$ tels que : $\chi^\mu = e^\mu{}_a x^a$, $x^a = e_\mu{}^a \chi^\mu$.
Pour une **transformation** telle que $\text{dét}(e_\mu{}^a) = e > 0$, $d^4x = e d^4\chi$.
Les **transformations générales** sont $\chi'^\mu = \frac{\partial \chi'^\mu}{\partial \chi^\nu} \chi^\nu$. Les **lois physiques** sont **invariantes** par ces **transformations** reliées par **deux référentiels** $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Et dans

les **référentiels tangents** en **tout point M**, l'**invariance** est **établie** pour une simple **transformation** de **Poincaré** entre **deux référentiels inertiels** $\mathcal{R}_0(\mathbf{M})$ et $\mathcal{R}_0{}'(\mathbf{M})$: $\mathbf{x'^a = \Lambda^a{}_b(M)x^b + a^a(M)}$.

. Pour un **vecteur**, $\mathbf{A^\mu}$, $\mathbf{A^a = e_\mu{}^a A^\mu}$, par la **transformation générale**,

$\mathbf{A'^\mu(\chi') = \frac{\partial\chi'^\mu}{\partial\chi^\nu} A^\nu(\chi)}$ et par **celle** de **Poincaré**, $\mathbf{A'^a(x') = \Lambda^a{}_b(M)A^b(x)}$.

*(Le **terme** de **déplacement** $a^a(M)$ des **coordonnées disparait** pour les **vecteurs**.)*

. De même, pour les **tenseurs** : $\mathbf{A'^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}(\chi') = A^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}(\chi)\frac{\partial\chi'^{\mu_1}}{\partial\chi^{\nu_1}}\frac{\partial\chi'^{\mu_2}}{\partial\chi^{\nu_2}}\ldots\frac{\partial\chi'^{\mu_n}}{\partial\chi^{\nu_n}}}$.

$\mathbf{A'^{a_1a_2\ldots a_n}(x') = A^{b_1b_2\ldots b_n}(x)\Lambda^{a_1}{}_{b_1}(M)\Lambda^{a_2}{}_{b_2}(M)\ldots\Lambda^{a_n}{}_{b_n}(M)}$.

. Pour un **spineur** de **Dirac** $\boldsymbol{\psi}$, de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}_0(\mathbf{M})$:

$\mathbf{\psi(x) = \psi(\chi)}$ pour la **transformation générale**. *(ψ est **scalaire** pour cette **transf°**)*

$\mathbf{\psi'(\chi') = \psi(\chi)}$. $\mathbf{\psi'(x') = e^{(1/8)\alpha^{ab}[\gamma_a,\gamma_b]}\psi(x)}$ pour la **transformation** de **Poincaré**.

$\mathbf{\partial_a = e^\mu{}_a\partial_\mu}$. $\mathbf{[\partial_\mu,\partial_\nu] = 0}$ et $\mathbf{[\partial_a,\partial_b] = [e^\mu{}_a\partial_\mu, e^\nu{}_b\partial_\nu]}$.

→ $\mathbf{[\partial_\mu,\partial_\nu] = (e^\mu{}_a\partial_\mu e^\nu{}_b - e^\mu{}_b\partial_\mu e^\nu{}_a)\partial_\nu}$.

. Avec la **dérivée covariante**,

$\mathbf{D_a{}'X' = (\Lambda^{-1})^\nu{}_a e^\mu{}_b(\partial_\mu - \partial_\mu\mathcal{D}[\Lambda(M)])\mathcal{D}[\Lambda(M)]^{-1} + \mathcal{D}[\Lambda(M)]\omega_\mu\mathcal{D}[\Lambda(M)]^{-1}}$.

→ $\mathbf{D_a{}'X' = (\Lambda^{-1})^b{}_a\mathcal{D}[\Lambda(M)]D_bX}$.

Pour un **champ spinoriel**, $\mathbf{\gamma^\mu = e^\mu{}_a\gamma^a}$, $\mathbf{D_\mu\,\psi = (\partial_\mu + (1/2)\omega_\mu{}^{cd}\gamma_{cd})\psi}$.

L'**action** dans un **espace plat** est : $\mathbf{S = \int d^4x\mathcal{L}\,(\varphi)}$. En **effectuant** $\mathbf{d^4x = ed^4\chi}$, on **utilise** les **tétrades**, on **passe** de $\boldsymbol{\partial_\mu}$ à la **dérivée covariante** :

$\mathbf{D_\mu = e^\mu{}_a(\partial_\mu + (i/2)\omega_{\mu a}{}^b J_{ab})}$. *($\boldsymbol{\omega_{\mu a}{}^b}$ **représente** la **connexion** de **spin**.)*

*Une **transformation** du **groupe** de **Lorentz restreint** peut en effet s'**écrire** sous une **forme exponentielle** $\boldsymbol{\Lambda = e^A}$, $\boldsymbol{A = (-i/2)A^{ab}J_{ab}}$,*

$\mathbf{[D_a,D_b] = e^\mu{}_a e^\nu{}_b[D_\mu,D_\nu] + (e^\mu{}_a D_\mu e^\nu{}_b)D_\nu - (e^\nu{}_b D_\nu e^\mu{}_a)D_\mu}$,

$\mathbf{T_{ab}{}^c D_c = (e^\mu{}_a D_\mu e^\nu{}_b)D_\nu - (e^\nu{}_b D_\nu e^\mu{}_a)D_\mu}$, où le **tenseur** de **torsion** $\mathbf{T_{ab}{}^c}$ est tel que $\mathbf{T_{ab}{}^c = e_\nu{}^c(e^\mu{}_a\partial_\mu e^\nu{}_b - e^\mu{}_b\partial_\mu e^\nu{}_a) + e^\mu{}_a\omega_{\mu b}{}^c - e^\mu{}_b\omega_{\mu a}{}^c}$.

On **écrit** alors $\mathbf{[D_a,D_b] = T_{ab}{}^c D_c + e^\mu{}_a e^\nu{}_b[D_\mu,D_\nu]}$, puis

$\mathbf{[D_a,D_b] = T_{ab}{}^c D_c + (i/2)R_{ab}{}^{cd}J_{cd}}$, où le **tenseur** de **courbure** $\mathbf{R_{ab}{}^{cd}}$ est tel que :

$\mathbf{R_{ab}{}^{cd} = e^\mu{}_a e^\nu{}_b(\partial_\mu\omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu{}^{ab}) - e^\mu{}_a e^\nu{}_b\omega_\mu{}^{ca}\omega_\nu{}^{cb} + e^\mu{}_a e^\nu{}_b\omega_{\nu c}{}^a\omega_\mu{}^{cb}}$.

On obtient $\mathbf{D_\mu e^\nu{}_a = \partial_\mu e^\nu{}_a + \omega_{\mu a}{}^b e^\nu{}_b}$, puis $\mathbf{[D_a,D_b] = T_{ab}{}^c D_c + (i/2)R_{ab}{}^{cd}J_{cd}}$ et $\mathbf{[D_\mu,D_\nu] = (i/2)R_{\mu\nu}{}^{ab}J_{ab}}$ *(**pas** de **torsion** car $[\partial_\mu,\partial_\nu] = 0$).*

$\mathbf{R_{ab}{}^{cd} = (e^\mu{}_a e^\nu{}_b - e^\nu{}_a e^\mu{}_b)(\partial_\mu\omega_\nu{}^{cd} - \omega_{\mu e}{}^c\omega_\nu{}^{ed})}$.Puis, par **contraction**,

$\mathbf{eR = eR_{ab}{}^{ab} = (e^\mu{}_a e^\nu{}_b - e^\nu{}_a e^\mu{}_b)(\partial_\mu\omega_\nu{}^{ab} - \omega_{\mu e}{}^a\omega_\nu{}^{eb})}$.

Et par **variation** de $\boldsymbol{\omega}$, on **détermine** :

$\mathbf{\delta(eR) = -\delta\omega_\nu{}^{ab}\left(\partial_\mu\left(e(e^\mu{}_a e^\nu{}_b - e^\nu{}_a e^\mu{}_b)\right) - 2\omega_{\mu a}{}^c e(e^\mu{}_c e^\nu{}_b - e^\nu{}_c e^\mu{}_b)\right)}$,

puis : $\mathbf{\delta(eR) = -\delta\omega_\nu{}^{ab}D_\mu\left(e(e^\mu{}_a e^\nu{}_b - e^\nu{}_a e^\mu{}_b)\right)}$. Donc, la **connexion** de **spin** est **nécessairement associée** à la **solution** de $\mathbf{D_\mu\left(e(e^\mu{}_a e^\nu{}_b - e^\nu{}_a e^\mu{}_b)\right) = 0}$.

Or $\mathbf{\delta\mathcal{L} = (-1/2\kappa^2)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abcd}D_\mu(e_\rho{}^c)e_\sigma{}^d\delta\omega_\nu{}^{ab}}$ pour l'**action** d'**Einstein-Hilbert**,

$S_{EH} = (1/2\kappa c)\int d^4x\sqrt{-g}\,R = (c^3/16\pi G)\int d^4x\sqrt{-g}\,R$, avec $\kappa = 8\pi G/c^4$.
D'où $D_\mu e_{\nu a} - D_\nu e_{\mu a} = 0$, puis $T_{\mu\nu}{}^a = D_\nu e_{\mu a} - D_\mu e_{\nu a} = 0$ *(torsion nulle)*.
$\delta S_m = \int d^4x\, eU_\mu{}^a \delta e^\mu{}_a$, où $T_{\mu a} = e_{\mu a} U_\nu{}^a$.
Pour une **variation** de **tétrade,** $\delta e^\mu{}_a = -e^\mu{}_b e^\nu{}_b \delta e_\nu{}^b$.
$\delta S_m = \int d^4x\, eU^\mu{}_a \delta e_\mu{}^a = \int d^4x\, eT^{\mu\nu}(e_{\nu a}\delta e_\mu{}^a) = (1/2)\int d^4x\, e\delta g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$.
Par **variation** de l'**action** avec les **tétrades** $e^\mu{}_a$, on **obtient** : $\delta e = ee^\mu{}_a \delta e_\mu{}^a$,
$\delta(eR) = \delta eR + e(\partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \omega_{\mu c}^{\ a}\omega_\nu{}^{cb})\delta(e^\mu{}_a e^\nu{}_b - e^\nu{}_a e^\mu{}_b)$.
$\delta eR = eRe^\mu{}_a\, \delta e_\mu{}^a$. $e\delta R = -2eR_{ab}^{\ cb} e^\mu{}_c e_\mu{}^a$
La **variation** de la **partie gravitationnelle donne** :
$(-1/2\kappa^2)\delta(eR) = (e/\kappa^2)(R_{ab}^{\ cb} - (1/2)\delta_a^{\ c}R)e^\mu{}_c e_\mu{}^a$.
Avec la **variation** de la **partie matérielle** on **retrouve** les **équations** d'**Einstein** :
$R_{ab}^{\ cb} - (1/2)\delta_a^{\ c}R = -\kappa^2 U^\mu{}_a e_\mu{}^c = -\kappa^2 T_a{}^c$. On **obtient** alors la **connexion** de **spin** :
$\omega_{\mu ab} = -(1/2)e^\nu{}_b(\partial_\mu e_{\nu a} - \partial_\nu e_{\mu a}) - (1/2)e^\rho{}_a(\partial_\rho e_{\mu b} - \partial_\mu e_{\rho b}) +$
$(1/2)e^\mu{}_b e^\nu{}_a e_\mu{}^a(\partial_\rho e_{\nu a} - \partial_\nu e_{\rho a}) - (1/2)(T_{b\mu a} - T_{ab\mu} + T_{\mu ab})$.

- **Tenseur énergie-impulsion et équation de Friedmann en RG**

La **métrique** de **Minkowski** $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ **correspond** à un **espace plat**.
La **dérivée covariante** D_α en **espace courbe** de **métrique** $g_{\mu\nu}$ **agit** sur les **champs vectoriels** A_β comme : $D_\alpha A_\beta = D_\alpha A_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}A_\gamma$ et les **tenseurs** $T^{\alpha\beta}_\gamma$ selon :
$$D_\mu T^{\alpha\beta}_\gamma = T^{\alpha\beta}{}_{\gamma;\mu} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}_\gamma}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\rho}T^{\rho\beta}{}_\gamma + \Gamma^\beta_{\mu\rho}T^{\alpha\rho}{}_\gamma - \Gamma^\rho_{\gamma\mu}T^{\alpha\beta}{}_\rho,$$
où Γ : **symbole** de **Christoffel** est tel que : $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = (1/2)g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$.
Explicitations de **définitions** en **relativité générale** :
. **Tenseur** d'**énergie-impulsion** de **fluide parfait** en **univers homogène isotrope** :
$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$, **valable** $\forall\, \mu,\nu \in [\![0,3]\!]$.
. **Tenseur** de **courbure** de **Riemann** :
$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\nu\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$, **valable** $\forall\, \mu,\nu \in [\![0,3]\!]$ *et* ***somme*** *sur* $\boldsymbol{\alpha,\beta} \in [\![0,3]\!]$ *pour les* ***termes*** *avec les* ***symboles*** *de* ***Christoffel***.
Tenseur d'**énergie-impulsion** de **fluide parfait** dans un **univers homogène isotrope** :
$T_{\mu\nu} = (p+\rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$.
Équation d'**Einstein** : $R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R - \lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, **valable** $\forall\, \mu,\nu \in [\![0,3]\!]$.
Conservation du **tenseur** d'**énergie-impulsion** :
$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha}T^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}T^{\mu\alpha} = 0$, **somme** sur $\mu \in [\![0,3]\!]$, **valable** $\forall\, \nu \in [\![0,3]\!]$
Pour $\mu = \nu = 0$, on **obtient** la **première équation** de **Friedmann** :
$\dot a^2/a^2 + k/a^2 - \lambda/3 = (8\pi G/3)\rho$. Pour $\mu = i, \nu = j$ *(indices vectoriels)*, on **obtient** la **deuxième équation** de **Friedmann** : $2(\ddot a/a) + \dot a^2/a^2 + k/a^2 - \lambda = -8\pi G p$.
Conservation du **tenseur** d'**énergie-imp.** : $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha}T^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}T^{\mu\alpha} = 0$.
Pour $\nu = 0$, on **obtient** : $\dot\rho + 3(\dot a/a)(\rho + p) = 0$.
Cela **correspond** à la **première loi** de la **thermodynamique**.
Temps conforme η : $d\eta := dt/a(t)$.

- **Gravitation** en **théorie ECSK**

. **Connexion** en **théorie ECSK** : $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = \left\{ {\nu \atop \mu\lambda} \right\} + K^{\nu}_{\mu\lambda}$. **Détermination** du **tenseur** de **torsion** $K^{\nu}_{\mu\lambda}$. **Dérivée covariante** pour une **connexion** de **torsion non nulle** : $\tilde{\nabla}$.

Compatibilité de la **métrique**, $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\alpha}\left(\partial_\nu g_{\mu\alpha} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right)$.

$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \left\{ {\rho \atop \alpha\mu} \right\} g_{\rho\nu} - \left\{ {\rho \atop \alpha\nu} \right\} g_{\mu\rho} = 0$. $\tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu} g_{\mu\rho} = 0$.

$\rightarrow 2 g_{\alpha\rho} \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = g_{\rho\alpha}\left(\Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\nu\mu}\right) + g_{\nu\rho}\left(\Gamma^\rho_{\mu\alpha} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu}\right) + g_{\mu\rho}\left(\Gamma^\rho_{\nu\alpha} - \Gamma^\rho_{\alpha\nu}\right)$

et $2 g_{\alpha\rho} \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}$. Donc, $2 g_{\alpha\rho} \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = g_{\rho\alpha} 2\Gamma^\rho_{(\mu\nu)} + g_{\nu\rho} T^\rho_{\mu\alpha} + g_{\mu\rho} T^\rho_{\nu\alpha}$, où $2\Gamma^\rho_{(\mu\nu)} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\nu\mu}$ et le **tenseur** de **torsion** tel que $T^\rho_{\mu\alpha} = \Gamma^\rho_{\mu\alpha} - \Gamma^\rho_{\alpha\mu}$.

$\Gamma^\rho_{(\mu\nu)} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} - \frac{1}{2} g^{\alpha\rho}\left(g_{\nu\rho} T^\rho_{\mu\alpha} + g_{\mu\rho} T^\rho_{\nu\alpha}\right) = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} - \frac{1}{2}\left(T_{\mu\nu}{}^{\rho} + T_{\nu\mu}{}^{\rho}\right)$.

$\rightarrow \Gamma^\rho_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + K^\rho_{\mu\nu}$, avec $K^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T^\rho_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}{}^{\rho} - T_{\nu\mu}{}^{\rho}\right)$.

. **Courbure** en **théorie ECSK**

Pour une **fonction scalaire f**, $[\tilde{\nabla}_\mu, \tilde{\nabla}_\nu] f = \partial_\mu \tilde{\nabla}_\nu f - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\rho f - \partial_\nu \tilde{\nabla}_\mu f + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\rho f$

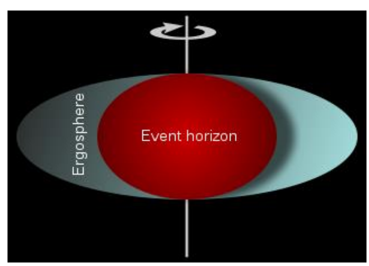
$[\tilde{\nabla}_\mu, \tilde{\nabla}_\nu] f = -\Gamma^\rho_{\mu\nu}\left(\partial_\rho f\right) + \Gamma^\rho_{\nu\mu}\left(\partial_\rho f\right) = -T^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho f$.

On **obtient** de même pour un **vecteur** V^α, $[\tilde{\nabla}_\mu, \tilde{\nabla}_\nu] V^\alpha = R^\alpha_{\rho\mu\nu} V^\lambda - T^\lambda_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\lambda V^\alpha$.

- **Trou noir** (« **TN** »)

Objet astral de **masse non nulle** si **localisée** qu'il **correspond** à une **singularité** des **équations** d'**Einstein** et l'**intensité** de son **champ gravitationnel interdit** à toute **matière** ou **rayonnement** de s'**extraire** de son **horizon** des **évènements**.
N'émettant ni **ne diffusant** de **lumière**, seuls ses **effets** peuvent être **observés**.

© commons.wikimedia.org
– MesserWoland-Perhelion



- **Types** de **trous noirs**

. de **charge électrique** et **moment cinétique nuls** : **TN** de **Schwarzchild**.
. de **charge électrique non nulle** et **moment cinétique nul** :
TN de **Reissner-Nordström**
. de **charge électrique nulle** et **moment cinétique non nul** : **TN** de **Kerr**.
. de **charge électrique** et **moment cinétique non nuls** : **TN** de de **Kerr-Newman**.

- **Évaporation** des **TN** – **rayonnement** de **Hawking**

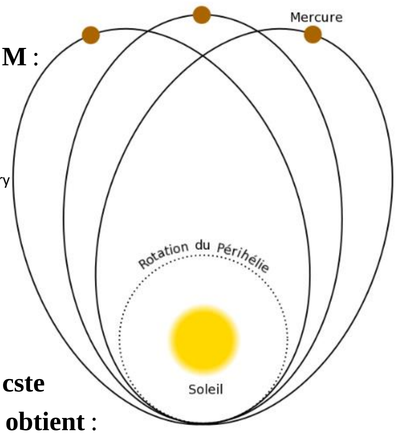
Les **forces** de **marée dues** au **champ gravitationnel** du **TN** peuvent **éloigner** la **particule** de son **antiparticule** avant qu'**elles** ne s'**annihilent**.
Le **TN** en **absorbe une**, l'**autre** est **émise**, c'est l'**effet Hawking** à l'**horizon** du **TN**.

La **particule** et son **antiparticule confinées** dans le **puits** de **potentiel** du **TN**, L'**énergie** de la **paire observée loin** du **TN** est **négative**. L'**évaporation** est **proportionnelle** à la **force** de **marée**, d'**intensité décroissante** avec la **taille** du **TN**, **générée**. L'**évaporation** s'**accélère** ainsi au cours du **processus** et l'**énergie** des **particules émises augmente** avec la **température** du **TN**. S'**ajoutant** à **celles** de **masse nulle**, l'**émission** de **particules** de **masse non nulle** peut alors **apparaitre** à la **fin** *(à partir d'une certaine **température**)*.
Pour **M** : **masse**, **A** : **surface** de l'**horizon**, **Q** : **charge électrique** et **L** : **moment cinétique** du **TN**. $\mathbf{M(A, Q, L)}$ est alors telle que :
$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{A}} = \boldsymbol{\kappa}/\mathbf{8\pi G}$, où $\boldsymbol{\kappa}$: **gravité** de **surface** du **TN**.
Selon **Hawking**, la **température** d'**évaporation** est : $\mathbf{T = \hbar\kappa/2\pi k_B c}$.
Pour un **TN** de **Schwarzschild**, le **rayon** de **Schwarzschild** est $\mathbf{R_S = 2GM/c^2}$.
Comme $\mathbf{A = 4\pi R_S{}^2}$ et $\mathbf{M = \sqrt{Ac^4/16\pi G^2}}$, $\mathbf{\kappa = c^4/4GM}$ et $\mathbf{T = \hbar c^3/8\pi k_B GM}$.
En **appliquant** la **loi** de **Stefan** à un **corps sphérique** de **rayon R** et **température** de **surface T**, l'**énergie rayonnée** est $\mathbf{L = 4\pi R^2 \sigma T^4}$.
La **perte temporelle** d'**énergie** de **masse** d'un **TN** de **Schwarzschild** est ainsi :
$\mathbf{-L = -dMc^2/dt = -4\pi(2GM/c^2)^2\sigma(\hbar c^3/8\pi k_B GM)^4}$.
On en **déduit** son **temps** d'é**vaporation** : $\mathbf{t_{évap} \approx 5120(\pi G^2/\hbar c^4)M^3}$.
*Le **phénomène** est donc **négligeable** car seuls des **astres** de **moins** de* $\mathbf{10^{-19}}\boldsymbol{M_{Sol}}$ *auraient un **temps** d'**évaporation inférieur** à l'**âge** de l'**univers**.*

- **Problème** à **deux corps**

*Le **problème** à **deux corps** en **RG** est la **détermination** de la **dynamique** et du **champ gravitationnel** de **deux corps définis** par les **équations** de **champ** de la **RG**. La **résolution** du **problème** de **Kepler** est essentielle pour **calculer** la **courbure** de la **lumière** par la **gravité** et le **mouvement** d'une **planète** en **orbite** ou **celui** des **étoiles binaires** et leur **perte progressive** d'**énergie** par **rayonnement gravitationnel**.*
La **RG décrit** le **champ gravitationnel** dans un **espace-temps courbe**, les **équations** de **champ régissant** la **courbure**, **non linéaires**, sont **difficiles** à **résoudre** sous une **forme fermée**. **Sans solution** au **problème** de **Kepler** en **RG**, la **solution** de **Schwarzschild** pour une **masse** d'un des **corps négligeable** par rapport à l'**autre** ***(considérée** donc comme **stationnaire et seul contributeur** au **champ gravitationnel)***, permet une **approximation** du **movement** ***(géodésique)*** et l'**évaluation** l'**évolution** de la **perte** d'**énergie** par **rayonnement gravitationnel**. Sinon les **deux masses** sont **supposées contributrices** du **champ gravitationne**l, comme dans le cas des **étoiles** ou **TN binaires**, une **méthode** d'**approximation itérative** est **representee** par l'**expansion post-newtonienne**, où une **solution initiale** est **successivement précisée**.

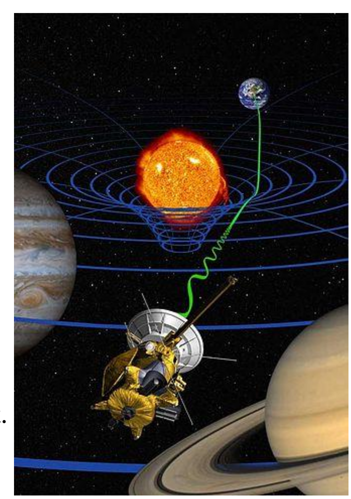
- **Preuve** de la **relativité générale** : **avance précise** du **périhélie** $\boldsymbol{\delta\varphi}$ de **Mercure**



© commons.wikimedia.org –Dhenry

Métrique de **Schwarzchild** pour les **astres** dans l'**espace vide isotrope** autour du **soleil** de **masse M** :
$\mathbf{ds^2 = (1 - r_g/r)dt^2 - (1 - r_g/r)^{-1}dr^2}$
$\mathbf{- r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}$, *où* $\boldsymbol{r_g = 2GM/c^2}$.
→ **Géodésique** de **Mercure** *avec les* ***symboles*** *de* ***Christoffel***,
$\boldsymbol{\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\sum_m g^{im}(g_{mk;\,l} + g_{ml;\,k} - g_{kl;\,m})}$,
où $\boldsymbol{g_{ik;\,l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}}$: $\forall$**k**, $\mathbf{\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j = 0}$,
où $\boldsymbol{\dot{x}^i = dx^i/d\tau}$, $\boldsymbol{\tau}$ *: temps propre*.
Ayant $\mathbf{x^0 = ct}$, $\mathbf{x^1 = r}$, $\mathbf{x^2 = \theta}$, $\mathbf{x^3 = \varphi}$, $\mathbf{r^2\dot{\varphi} = K = cste}$ et $\mathbf{(1 - r_g/r)\dot{t} = E/mc^2}$. En posant $\mathbf{w = 1/r}$, on **obtient** :
$\mathbf{\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = \frac{GM}{K^2} + \frac{3GM}{c^2}w^2}$: **(Binetg)** *(**formule** de **Binet généralisée**)*. Et également,
$\mathbf{\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = C = E^2/2m^2c^2}$: **(CEg)**, où $\mathbf{V_{eff}(r) = (1 - r_g/r)(c^2 + K^2/r^2)/2}$.
Pour **u**, solution de (**Binet**) (newtonien), en posant $\mathbf{w = u + \delta u}$, où $\mathbf{|\delta u| \ll |u|}$, on obtient :
$\mathbf{w = (1 + e.\cos\varphi)/p + \delta u}$, (Binetg) devient : $\mathbf{\frac{d^2\delta u}{d\varphi^2} + \delta u = \frac{3r_g}{2p^2}(1 + 2e.\cos\varphi + e^2.\cos^2\varphi)}$
au **1**[er] **ordre** en $\boldsymbol{\delta u}$ → Sol° : $\mathbf{\delta u = a.\cos(\varphi + b) + \frac{3r_g}{2p^2}(1 + e.\varphi\sin\varphi + e^2.(3 - \cos 2\varphi)/2)}$
(a, b : cstes). Seule $\boldsymbol{\varphi \longmapsto \frac{3r_g}{2p^2}e.\varphi\sin\varphi}$, non périodique ni cste, **contribue** pour $\boldsymbol{\delta\varphi}$ et :
$\mathbf{w \approx (1 + e.\cos(1 - \varepsilon)\varphi)/p}$, où $\mathbf{\varepsilon = 3r_g/2p \rightarrow \delta\varphi = 2\pi/(1 - \varepsilon) - 2\pi \approx 2{,}09.10^{-4}\ rad}$.

- **Effet Shapiro**


© NASA/JPL-Caltech

Effet élémentaire, **retard gravitationnel** de la **lumière**, **résultant** de la **RG** signifiant un **temps** d'**arrivée** d'un **signal** se **propageant** dans l'**espace** avec **présence** de **matière** dans son **voisinage**.
Cet **effet** est **dû** au fait que le **signal observé ne** se **propage plus** en **ligne droite**, **parcourant** ainsi un **chemin plus grand** qu'en l'**absence** de **masse** dans son **voisinage** et à ce que l'**écoulement** du **temps** est **affecté** par la **présence** de **masse**. L'**effet Shapiro concerne** donc le **retard** de la **propagation** des **ondes électromagnétiques** dans le **champ gravitationnel** d'un **objet massif**, en rapport à la **durée sans** cet **objet**.
Pour une **métrique** de **Schwarzchild**, le **retard** $\mathbf{\Delta t}$ pour **aller** d'un **point A** à un **point B** de **coordonnées radiales** $\mathbf{r_A, r_B}$ s'**écrit** : $\mathbf{\Delta t \approx (2Gm/c^3)(\ln(4r_Ar_B/r_0{}^2) - 1)}$,
où $\mathbf{r_0}$ est la **coordonnée radiale** pour laquelle la **trajectoire** des **photons** est la **plus proche** de l'**objet** de **masse m**.