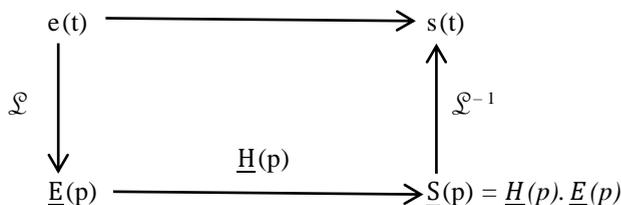


# Fiche P17 – Systèmes et filtres

## Définitions et variables

- Un **système** transforme un **signal d'entrée**  $\underline{V}_e$  en un **signal de sortie**  $\underline{V}_s$ .  
 En mode **sinusoïdal** (avec la **pulsation**  $\omega$ ), la **fonction de transfert complexe**  $\underline{H}$  du **système** est alors **définie** par  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ . D'autres f° de transfert :  $\frac{\underline{V}_s}{\underline{I}_e}$ ,  $\frac{\underline{I}_s}{\underline{I}_e}$ ,  $\frac{\underline{I}_s}{\underline{V}_e}$ .
- Un **système linéaire S** tel que  $\forall k \in \mathbb{N}, e_k \xrightarrow{S} s_k$ , vérifie  $\forall \lambda_k \in \mathbb{C}, \sum \lambda_k e_k \xrightarrow{S} \sum \lambda_k s_k$ .  
 Pour tout **signal d'entrée périodique**, pouvant donc être **décomposé en série de Fourier**, la **fonction de transfert**  $\underline{H}$  du **système** connue, on peut alors **déterminer** le **signal de sortie**  $\underline{s} : \underline{e}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{e}_n e^{jn\omega t} \xrightarrow{S} \underline{s}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{H}(jn\omega) \underline{e}_n e^{jn\omega t}$ .
- **Gain** :  $G(\omega) = 20 \log(|\underline{H}(j\omega)|)$ . **Pulsation de coupure** :  $\omega_c / G(\omega_c) = G_{\max} - 3 \text{ dB}$ .  
**Phase** :  $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \text{Arctan}(\Im(\underline{H}(j\omega)) / \Re(\underline{H}(j\omega)))$ .  
Rappels : si  $zz' \neq 0, \text{Arg}(z'/z) = \text{Arg}(z') - \text{Arg}(z)$ , si  $a \neq 0, \text{Arg}(a + jb) = \text{Arctan}(b/a)$ .
- **Diagramme de Bode** : **représentations graphiques** de  $G, \varphi$  en fonction de  $\log(\omega)$ .  
 L'unité d'abscisse est une **décade**  $([\omega_0, 10 \cdot \omega_0])$ . L'unité d'ordonnée pour le **gain** est le **décibel (dB)** et pour la **phase**, le **radian (rad)**.  
 La **pente** des **asymptotes** à la courbe  $G(\log(\omega))$  s'exprime en **dB/décade**.
- **Transformations**  $t \leftrightarrow p$  ( $p = j\omega$  par exemple)



**Transformée de Laplace** d'une **fonction f** :  $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ .

**Transformée de Fourier** d'une **fonction f** :  $\text{TF}(f)(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt$ .

Cf. *exemples et formules des transformées de Laplace et de Fourier en fiche M11.*

- Un **filtre** est un **système** qui peut **sélectionner** une **gamme de fréquences** d'un **signal entrant**. Plusieurs **types** de **filtres** :

- **passé-bas** :  $|\underline{H}(j\omega)| \rightarrow 0$  pour  $\omega \gg \omega_c$  et **non** pour  $\omega \ll \omega_c$ .
- **passé-haut** :  $|\underline{H}(j\omega)| \rightarrow 0$  pour  $\omega \ll \omega_c$  et **non** pour  $\omega \gg \omega_c$ .
- **passé-bande** :  $|\underline{H}(j\omega)| \rightarrow 0$  pour  $\omega \ll \omega_1$  et  $\omega \gg \omega_2$ .

La **bande passante** d'un filtre passé-bande est  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , avec

$$|\underline{H}(\omega_1) = |\underline{H}(\omega_2) = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}, \text{ soit } G_{dB}(\omega_1) = G_{dB}(\omega_2) \approx G_{\max, dB} - 3.$$

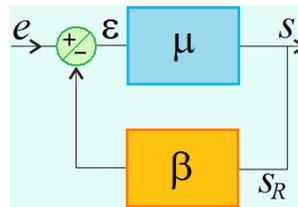
- **actif** : avec des **composants actifs** (AO, transistors, ...)  
 $|\underline{H}(j\omega)|_{\max}$  peut être supérieur à 1.
- **passif** : avec des **composants passifs** (résistors, condensateurs, ...)  
 $|\underline{H}(j\omega)|_{\max}$  ne peut pas être supérieur à 1.

- Rétroaction**

$$s = \mu \varepsilon - s_R, \quad \varepsilon = e - \beta s_R.$$

Si tout le **signal** est **prélevé** par la **chaîne de retour**,  $s_R = \mu \varepsilon$ ,

$$\varepsilon = e - \beta \mu \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{e}{1 + \mu \beta}.$$



- Filtres numériques** ( $x(i)$  : entrées,  $y(j)$  : sorties)

Les **filtres analogiques** sont constitués de composants électroniques.

Les **filtres numériques** fonctionnent eux avec des circuits intégrés, processeurs programmables, logiciels. Ils peuvent modifier le spectre d'un signal discret.

- **Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)**, **non récursif** (la sortie ne dépend que d'une ou plusieurs entrées). La réponse à une impulsion (Cf. fonction de Dirac  $\delta$ ) tendra à s'annuler après une durée assez grande.
- **Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)**, **récursif** (la sortie dépend d'une ou plusieurs entrées et sorties : présence de boucle de contre-réaction, *feedback*). La réponse à une impulsion ne s'annule jamais.

- Fonction de z** **PSI**

**Échantillonnage** de période  $T_e$  d'un signal  $s$  :  $s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(k \cdot T_e) \cdot \delta(t - k \cdot T_e)$

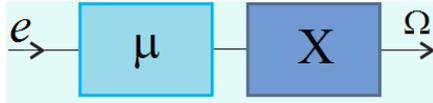
En posant  $s_k = s(k \cdot T_e)$  et  $z = e^{p \cdot T_e}$ , la **transformée de Laplace**, puis de  $z$  est :

$$S(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} \delta(t - k \cdot T_e) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k e^{-p \cdot k \cdot T_e} \rightarrow S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k z^{-k}.$$

## Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Moteur X** et **intérêts** d'un **asservissement** (Cf. (Re))  
**Réponse du moteur à un échelon de tension E pour  $t > 0$**

Sans asservissement (Boucle ouverte) :



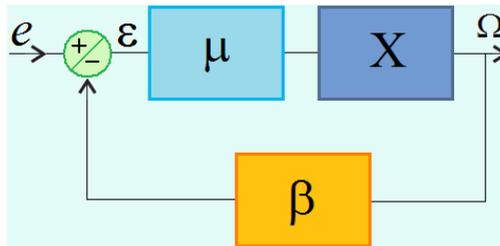
$\Omega$  : vitesse de rotation du moteur, rappel :  $\mathcal{L}(\text{éch})(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot 1 dt = 1/p$

$$\Omega(t) + \tau \frac{d\Omega}{dt} = \mu K_0 E \text{éch}(t) \rightarrow \Omega(p)(1 + \tau p) = \mu K_0 E/p \rightarrow \Omega(p) = \mu K_0 E \left( \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p} \right)$$

$$\rightarrow \mathbf{T}(p) = \frac{\Omega(p)}{e(p)} = \frac{\mathbf{T}_0}{1 + \tau p} \rightarrow \mathbf{T}(t) = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{T}(p)) = \mathbf{T}_0 e^{-t/\tau}, \text{ avec } T_0 = \mu K_0$$

et  $\Omega(t) = \mathcal{L}^{-1}(\Omega(p)) = \mathbf{T}_0 E (1 - e^{-t/\tau})$  (Cf. fiche M11, transformées de Laplace).

Avec asservissement (Boucle fermée) :



$$\varepsilon(p) = e(p) - \beta \Omega'(p) \text{ et } \Omega'(p) = \mu \frac{K_0}{1 + \tau p} \varepsilon(p) \text{ car } \Omega'(t) + \tau \frac{d\Omega'}{dt} = \mu K_0 \varepsilon(t)$$

$$\rightarrow \mathbf{T}'(p) = \frac{\Omega'(p)}{e(p)} = \frac{\mu K_0}{1 + \tau p + \mu \beta K_0} = \frac{\mathbf{T}_0'}{1 + \tau' p}$$

$$\rightarrow \mathbf{T}'(t) = \mathcal{L}^{-1}(\mathbf{T}'(p)) = \mathbf{T}_0' e^{-t/\tau'} \text{ et } \Omega'(t) = \mathcal{L}^{-1}(\Omega'(p)) = \mathbf{T}_0' E (1 - e^{-t/\tau'})$$

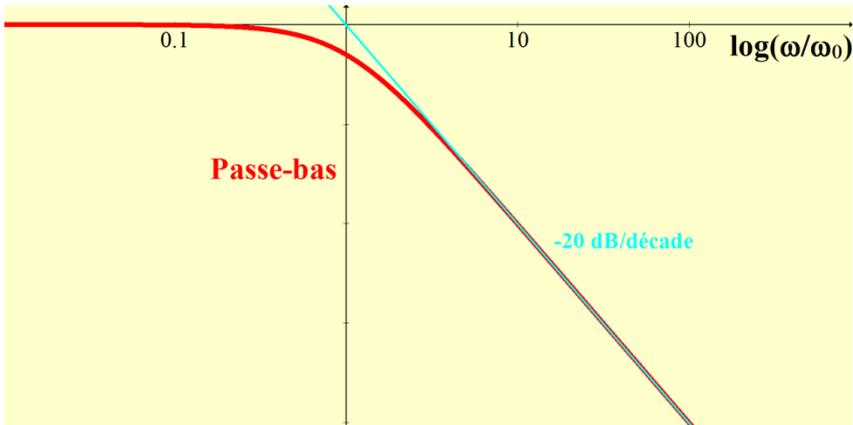
$$\text{avec } \mathbf{T}_0' = \frac{\mu K_0}{1 + \mu \beta K_0} \in ]0; \mathbf{T}_0 = \mu K_0[ \text{ et } \tau' = \frac{\tau}{1 + \mu \beta K_0} < \tau.$$

## Formules, propriétés

### ▪ Filtre passe-bas :

➤ du 1<sup>er</sup> ordre :  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

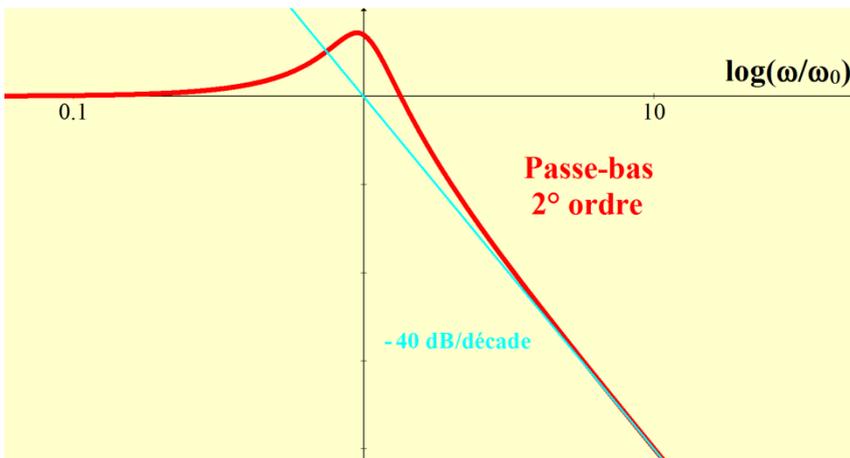
Gain :  $G(\omega) = G_0 - 10 \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$ ,  $G_0 = 20 \log |H_0|$



Phase :  $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}_0) - \text{Arctan}(\omega/\omega_0)$

➤ du 2<sup>ème</sup> ordre :  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{Q\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Gain :  $G(\omega) = G_0 - 10 \log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{Q^2\omega^2}{\omega_0^2}\right)$

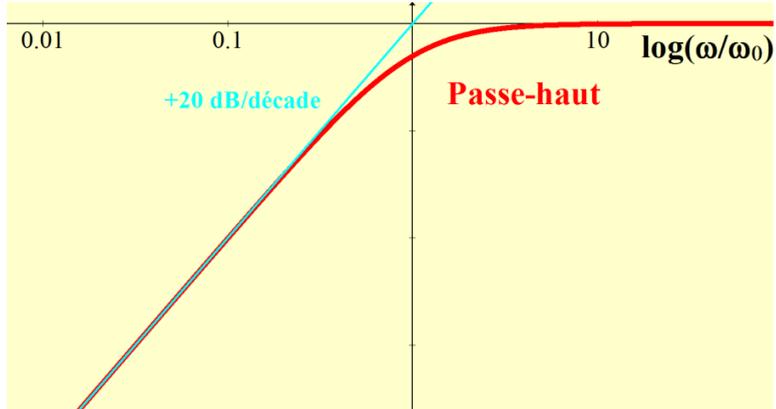


Phase :  $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}_0) - \text{Arctan}\left(Q \frac{\omega}{\omega_0 - \omega^2/\omega_0}\right)$ .

▪ Filtre passe-haut :

➤ du 1<sup>er</sup> ordre :  $\underline{H} = \frac{H_0 \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$

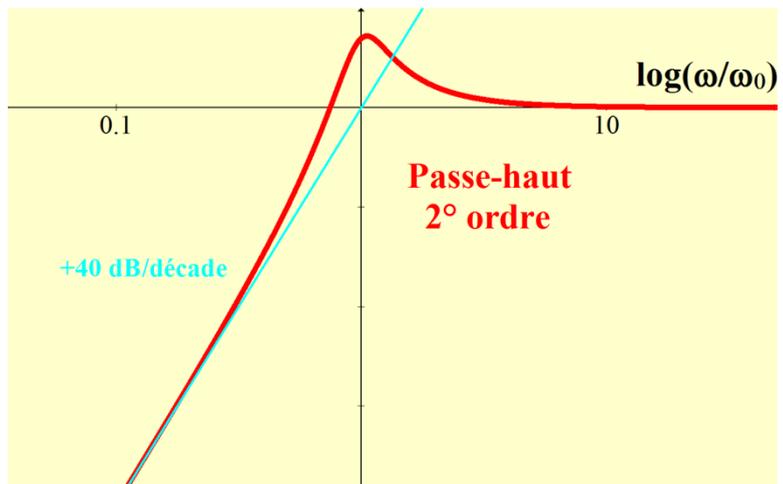
Gain :  $G(\omega) = G_0 + 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10 \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$



Phase :  $\varphi = \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\underline{H}_0) - \text{Arctan}(\omega/\omega_0)$

➤ du 2<sup>ème</sup> ordre :  $\underline{H} = \frac{H_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j \frac{Q\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Gain :  $G(\omega) = G_0 + 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10 \log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{Q^2 \omega^2}{\omega_0^2}\right)$

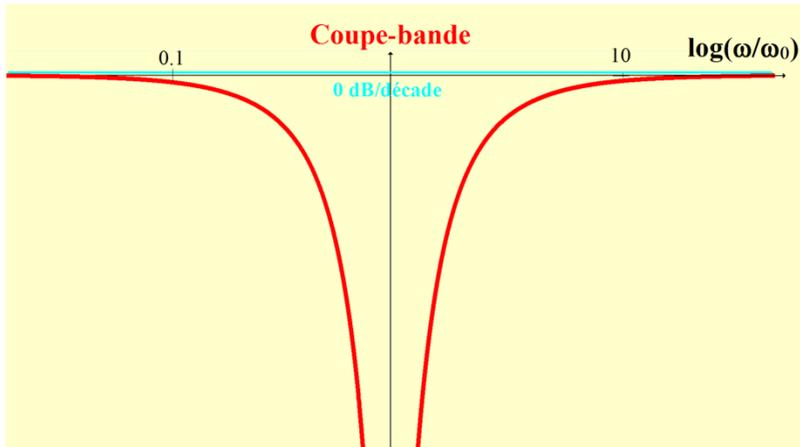


Phase :  $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}_0) - \text{Arctan}(Q/(\omega_0/\omega - \omega/\omega_0))$

▪ Filtre coupe-bande et passe-bande :

➤ coupe-bande :  $\underline{H} = \frac{H_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$

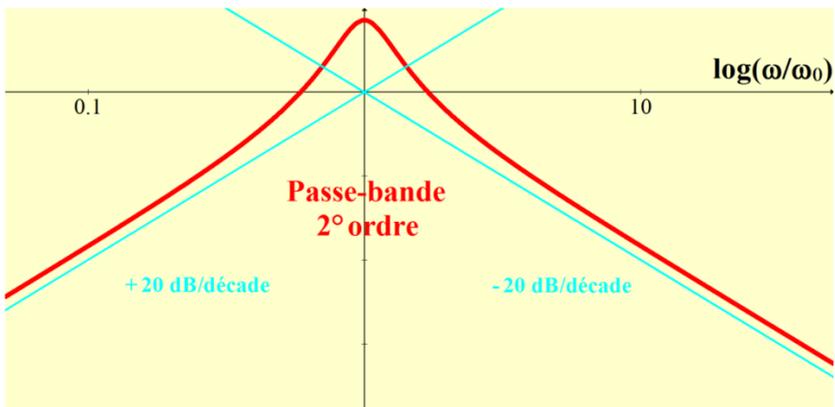
Gain :  $G(\omega) = G_0 - 10 \log \left( \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{Q^2 \omega^2}{\omega_0^2}} \right)$



Phase :  $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}_0) - \text{Arctan}(\omega / Q\omega_0 (1 - \omega^2 / \omega_0^2))$

➤ passe-bande du 2<sup>ème</sup> ordre :  $\underline{H} = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{Q\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Gain :  $G(\omega) = G_0 + 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) - 10 \log \left( \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{Q^2 \omega^2}{\omega_0^2} \right)$



Phase :  $\varphi = \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\underline{H}_0) - \text{Arctan}(Q \omega / (\omega_0 - \omega^2 / \omega_0))$ .

- **Rétroaction (Re)**

Si tout le signal est prélevé par la chaîne de retour,  $\varepsilon = e - \beta\mu\varepsilon \rightarrow G = \frac{\mu}{1+\mu\beta}$

Amélioration de la distorsion d'amplitude pour une variation  $d\mu$  :  $\frac{dG}{G} = \frac{d\mu}{\mu} \frac{1}{1+\mu\beta}$

Amélioration de la distorsion de phase pour une variation infinitésimale de  $\mu$  :

$\mu = a + jb \rightarrow \varphi = \text{Arg}(\mu) = \text{Arctan}(b/a)$

$\rightarrow \gamma = \text{Arg}(G) = \varphi - \text{Arg}(1 + a\beta + jb\beta) \rightarrow \gamma = \varphi - \text{Arctan}(b\beta/(1 + a\beta))$

Évolution du circuit rétroactionné :

$$\tau_0 \frac{ds}{dt} + s(t) = \mu_0 \varepsilon(t) = \mu_0 (e - \beta s(t)) \rightarrow s(t) = s_0(t) + S_0 e^{-\frac{1+\mu_0\beta}{\tau_0} t}$$

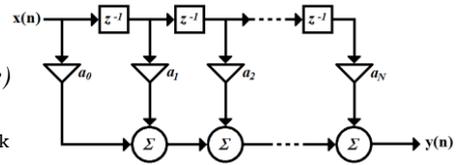
- **Filtre numérique non récursif**

(Structure directe,  $x(n)$  : entrée,  $y(n)$  : sortie)

Équation aux différences :

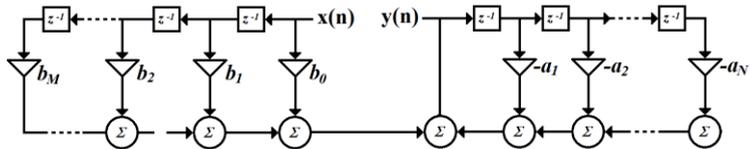
$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k), \quad x(n-k) \rightarrow X(z)z^{-k}$$

$$\rightarrow Y(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{-k} X(z), \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{-k}$$



PSI

- **Filtre numérique récursif** (Structure directe,  $x(n)$  : entrée,  $y(n)$  : sortie)



Équation aux différences :  $y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$

$\rightarrow (1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}) Y(z) = X(z) \cdot \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$ , soit :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}} \quad \text{et} \quad H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) z^{-k} \rightarrow \text{La suite } h \text{ se déduit de :}$$

$h(0) = b_0, h(1) = b_1 - a_1 b_0, h(k+1) = b_{k+1} - \sum_{n=1}^k a_{k+1-n} h(n)$  avec  $a_{j>N} = 0, b_{j>M} = 0$ .

La **stabilité** est réalisée si  $\sum_{k=0}^n |h(k)|$  a une **limite finie** pour  $n \rightarrow +\infty$  : si les **pôles** de  $H(z)$  sont à l'**intérieur** du **cercle unité** ( $|z_i| < 1$ ) ( $z_i$  tq  $1 + \sum_{n=1}^N a(n) z_i^{-n} = 0$ ).

- **Transformations adaptées** pour  $y(t) = \frac{dx}{dt}, x(t) = \int_0^t y(u) du \rightarrow Y(p) = pX(p)$

. Transformation d'Euler (méthode des rectangles) (**Eu**) :  $y_k = (x_k - x_{k-1}) / T_e$

Soit  $Y(z) = (X(z) - X(z)z^{-1}) / T_e$ , puis  $H(p) = Y(p) / X(p) = p \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_e} = H(z)$

. Transformation homographique (méthode des trapèzes) (**Ho**) :

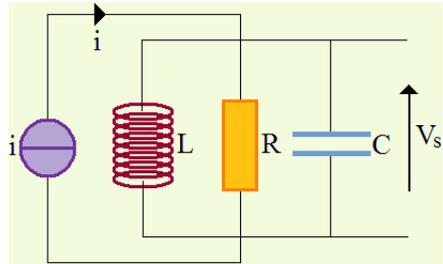
$x(t) = \int_0^t y \rightarrow x_k = x_{k-1} + (T_e/2)(y_k + y_{k-1})$ . On obtient alors  $p \rightarrow \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

## Exercices d'application et grands classiques (en mode sinusoïdal, $\omega$ )

**Énoncés :**

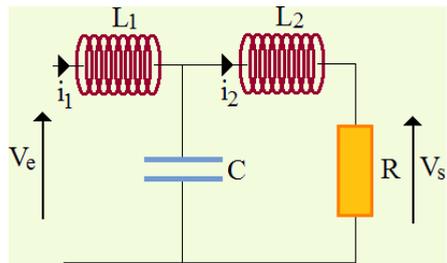
- **1. Filtre passe – bande du 2<sup>ème</sup> ordre**

Soit  $\underline{T} = \frac{V_s}{i}$ , exprimer  $|\underline{T}|$



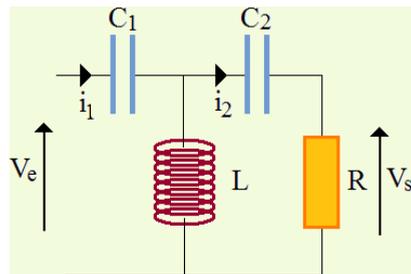
- **2. Filtre passe – bas de Butterworth**

Déterminer l'impédance équivalente,  $Z_{\text{éq}} : L_1, ((L_2, R) // C)$  avec  $L_1 = L_2 = L$ , puis  $\frac{V_s}{V_e}$  et vérifier le type de ce filtre.



- **3. Filtre passe – haut de Butterworth**

Déterminer l'impédance  $Z = \frac{V_s}{i_1}$ , puis  $\frac{V_s}{V_e}$  et  $\left| \frac{V_s}{V_e} \right|$ .



▪ **4. Exemple de système : réduction de bruit de fond sismique (d'après X-PSI)**

Notation transformée de Laplace :  $f(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$ .

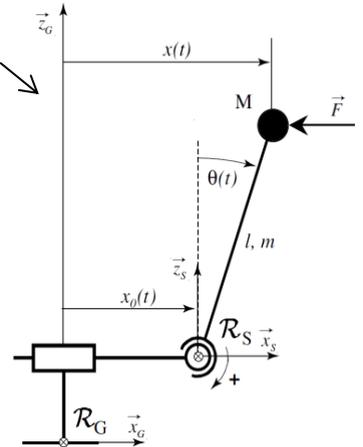
Pendule simple inversé mesurant les écarts entre les positions de la masse  $M$  et du sol :  $x(t) - x_0(t)$

Montrer que  $x(p) = I(p)(x_0(p) - \alpha F(p))$ ,

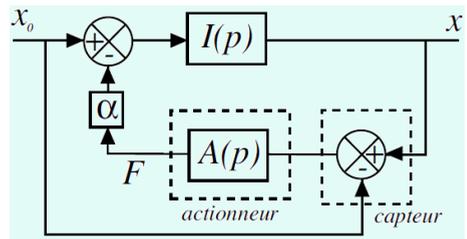
avec  $\alpha = \frac{l^2}{C - Mgl}$ ,

$I(p) = \frac{\omega_r^2}{p^2 + \omega_r^2}$  avec  $\omega_r^2 = \frac{C}{Ml^2} - \frac{g}{l}$

Soit  $A(p) = \eta p$ , déterminer  $G(p) = \frac{x(p)}{x_0(p)}$ .



Décrire le schéma du système :



▪ **5. Filtre passe – bas du 1<sup>er</sup> ordre,  $H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$  (Echantillonnage :  $T_e$ )**

Montrer que  $H(z) = \frac{1}{(1 + \tau/T_e) - (\tau/T_e)z^{-1}}$ .



En déduire l'équation aux différences :  $y_k = \frac{\tau/T_e}{1 + \tau/T_e} y_{k-1} + \frac{1}{1 + \tau/T_e} x_k$ .

A.N :  $\tau = 1$  ms et  $T_e = 50$   $\mu$ s, déterminer  $y_k$  pour une

. réponse impulsionnelle :  $x_1 = 1, x_k = 0$  pour  $k > 1, y_0 = 1$ .

. réponse à un échelon :  $x_k = 1$ , pour  $k \geq 1$ .

Déterminer  $H(z)$  et en déduire l'équation aux différences.

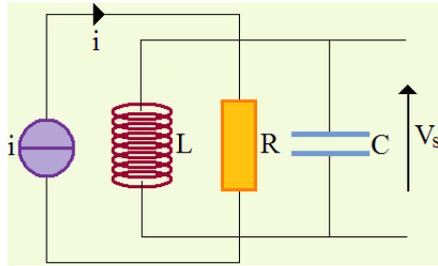
Corrigés :

- 1. Filtre passe – bande du 2<sup>ème</sup> ordre (Cf. (Z), (RL), (RC))

$$\underline{T} = \frac{V_s}{\underline{i}} = \frac{R \frac{L}{C}}{\frac{L}{C} + j \left( RL\omega - \frac{R}{C\omega} \right)}$$

$$\rightarrow |\underline{T}| = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}},$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = RC\omega_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}}$



- 2. Filtre passe – bas de Butterworth (Cf. (Z), (RL), (RC))

$Z_{\text{éq}} : L_1, ((L_2, R) // C)$  avec  $L_1 = L_2 = L$

(Z)  $\rightarrow Z_{\text{éq}} = jL_1\omega + \frac{R + jL_2\omega}{1 - L_2C\omega^2 + jRC\omega}$

Soit  $Z_{\text{éq}} = \frac{R(1 - LC\omega^2) + j(2L\omega - L^2C\omega^3)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

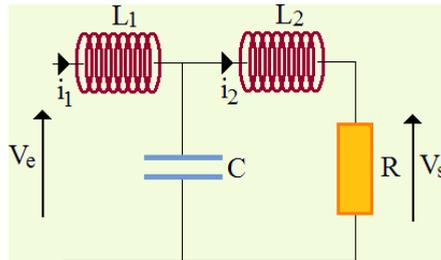
$\underline{V}_e = Z_{\text{éq}} \underline{i}_1, \underline{V}_s = R \underline{i}_2$

(Mailles)<sub>1</sub> :  $\underline{i}_1 - \underline{i}_2 = jC\omega(V_e - jL_1\omega \underline{i}_1)$

$\rightarrow \underline{i}_2 = (1 - LC\omega^2 - jC\omega Z_{\text{éq}}) \underline{i}_1$  ou (Mailles)<sub>2</sub> :  $\underline{i}_1 - \underline{i}_2 = jC\omega(R + jL_2\omega) \underline{i}_2$

$\rightarrow \underline{i}_2 = \frac{\underline{i}_1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \rightarrow$  Avec  $\omega_1 = \frac{1}{RC}, \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $\omega_3 = \frac{R}{L},$

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right)}{\left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right) \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right) + j \frac{\omega}{\omega_3} \left( 2 - \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right)}, \left| \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} \right| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \left( \frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 \rightarrow 0.$$

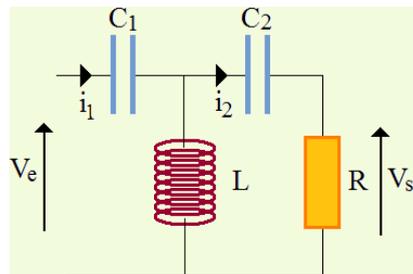


- 3. Filtre passe – haut de Butterworth (Cf. (Z), (RL), (RC))

$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{Z}{Z + 1/jC_1\omega},$  avec  $Z = \frac{(R + 1/jC_2\omega)jL\omega}{R + j(L\omega - 1/C_2\omega)}$

$$\left| \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} \right| = \frac{\sqrt{\left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^4 + \left( \frac{C_1}{C_2} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\omega_3} \right)^2}}{\sqrt{\left( \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 - 1 \right)^2 + \left( \frac{\omega_2}{\omega} - \left( 1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \left( \frac{\omega}{\omega_3} \right) \right)^2}}$$

avec  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}, \omega_2 = \frac{1}{RC_2}, \omega_3 = \frac{R}{L}.$



- 4. Exemple de système : réduction de bruit de fond sismique (d'après X-PSI)**  
 Notation transformée de Laplace :  $f(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$  (... : cf. fiche M11)

Pendule simple inversé mesurant les écarts entre les positions de la masse  $M$  et du sol :  $x(t) - x_0(t)$

D'après (M.cin) (Cf. fiche P3) :

$$Ml^2 \ddot{\theta} = Mgl \sin \theta - Ml \ddot{x}_0 \cos \theta - Fl \cos \theta - C\theta \text{ et } \theta \sim 0$$

$$\rightarrow x = x_0 + l\theta \rightarrow \ddot{x} + \left( \frac{C}{Ml^2} - \frac{g}{l} \right) x = \left( \frac{C}{Ml^2} - \frac{g}{l} \right) x_0 - \frac{F}{M}$$

$$\rightarrow \mathbf{x}(p) = \mathbf{I}(p)(\mathbf{x}_0(p) - \alpha \mathbf{F}(p)), \text{ avec } \alpha = \frac{l^2}{C - Mgl},$$

$$\mathbf{I}(p) = \frac{\omega_r^2}{p^2 + \omega_r^2} \text{ avec } \omega_r^2 = \frac{C}{Ml^2} - \frac{g}{l}$$

$$\text{et } \mathbf{F}(t) = \eta \frac{d}{dt}(x(t) - x_0(t)) \rightarrow \mathbf{F}(p) = \eta p(x(p) - x_0(p))$$

$$\text{Soit } \mathbf{A}(p) = \eta p \text{ et } \mathbf{G}(p) = \frac{\mathbf{x}(p)}{\mathbf{x}_0(p)} = \frac{1 + \alpha \eta p + (\alpha \eta / \omega_r^2) p^2}{1 + \alpha \eta p + p^2 / \omega_r^2}.$$

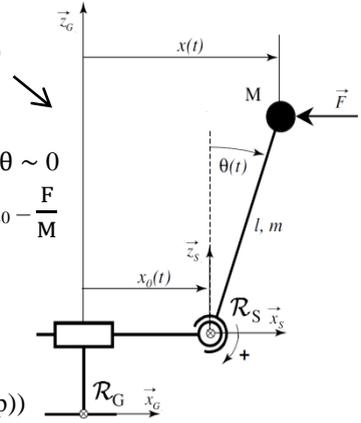
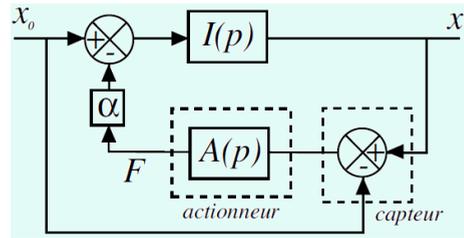


Schéma du système :

*Le capteur pilote l'actionneur qui améliore l'atténuation.*



- 5. Filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre,  $\mathbf{H}(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$**  (Echantillonnage :  $T_e$ )

. (Eu)  $\rightarrow \mathbf{H}(z) = Y(z)/X(z) = \frac{1}{(1 + \tau/T_e) - (\tau/T_e)z^{-1}}$

$\rightarrow$  Équation aux différences :  $y_k = \frac{\tau/T_e}{1 + \tau/T_e} y_{k-1} + \frac{1}{1 + \tau/T_e} x_k$

A.N :  $\tau = 1 \text{ ms}$  et  $T_e = 50 \mu\text{s} \rightarrow y_k = 0,95238 \times y_{k-1} + 0,04762 \times x_k$

. **Réponse impulsionnelle** :  $x_1 = 1, x_k = 0$  pour  $k > 1, y_0 = 1$

$\rightarrow y_1 = 0,95238 + 0,04762 = 1$ , puis  $y_k = 0,95238^{k-1}$ , pour  $k \geq 2$ .

. **Réponse à un échelon** :  $x_k = 1$ , pour  $k \geq 1, y_0 = 0$  ( $\leftrightarrow y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$ )

$\rightarrow y_k = 0,95238 \times y_{k-1} + 0,04762 \rightarrow y_k = 1 - 0,95238^k$ , pour  $k \geq 1$ .

. (Ho)  $\rightarrow \mathbf{H}(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 + 2\tau/T_e) - (1 - 2\tau/T_e)z^{-1}} = \frac{1 - z^{-1}}{(1 + a) - (1 - a)z^{-1}}$ ,  $a = 2\tau/T_e$

$\rightarrow$  Équation aux différences :  $(1 + a)y_k - (1 - a)y_{k-1} = x_k - x_{k-1}$ .