Fiche M5 – Dérivées, intégration et primitives

Définitions *(Cf. fiche **M4** pour les **notions** de **dérivation, I intervalle réel**, $n \in \mathbb{N}$.)*

- Soit **f**, une **fonction réelle** d'**ensemble de définition D_f**, alors, *avec a, $x_0 \in D_f$* :
  F est une **primitive** de **f** $\Leftrightarrow$ **F** est **dérivable** et **F' = f**. **F** est donc **définie** à une **cste près** et pour les réels x_0 et y_0, il existe une seule primitive **F** de **f** telle que $F(x_0) = y_0$.
  Si **f** est **intégrable** sur D_f *(f y admet une **primitive**.)* : $\forall\, [\alpha, \beta] \subset D_f$, $\int_\alpha^\beta f$ est **définie**.
  $\rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}$ tel que $[a, x] \subset D_f$, $\int_a^x f$ est l'**unique primitive** de **f** qui **s'annule** en **a**.
  $\rightarrow$ Pour toute **primitive F** de **f** et avec $[a, b] \subset D_f$, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

- *Rappel* : **Classe $\mathcal{C}^n(I)$** : ensemble des fonctions **n fois dérivables** sur **I** avec **dérivée n$^{\text{ème}}$ continue** sur **I**. **Classe $\mathcal{D}^n(I)$** : ensemble des fonctions **n fois dérivables** sur **I**.

- **Sommes** de **Riemann** d'une **fonction réelle f** sur un **intervalle [a, b]** **(SR)**
  *Elles sont les sommes des aires de n rectangles contigus sur l'intervalle [a, b], de largeur que l'on fait tendre vers 0, entre l'axe des abscisses et la courbe représentant **f**.*
  Soit **f** : $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **bornée** et $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$, une **somme** de **Riemann** est : $R(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\, f(\xi_k)$, où $\xi_k \in]x_k, x_{k+1}[$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
  En particulier, $\Sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(b-a)\, f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} h\, f(a + kh)$, $h = \frac{(b-a)}{n}$
  Pas de σ : $\delta = \mathrm{Max}_{k\in\{0,\dots,n-1\}}(x_{k+1} - x_k)$, $\lim_{\delta\to 0} R(f, \sigma) = \int_a^b f$: **f** est Riemann-intégrable.
  *Sur [**a**, **b**], **f** continue, continues par morceaux, monotone $\Longrightarrow$ **f** est Riemann-intégrable.*

- **Méthodes** de **calcul** d'**intégrales** autres que par les sommes de **Riemann** : **méthode** des **trapèzes** : ajout dans la sommation de **Riemann** (avec l'aire des rectangles) des aires des triangles reliant $(x_n, f(x_n))$, $(x_{n+1}, f(x_n))$ et $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$, **méthode** de **Simpson** : somme considérant la **courbure**, pondérée de $f(x_n)$, $f(x_{n+1})$ et $f((x_n + x_{n+1})/2)$

- **Intégrales impropres** $\int_a^b f$, avec **f intégrable** sur **[a, b[** ou sur **]a, b]** ou sur **]a, b[** , ou $\int_a^{+\infty} f$, f **intégrable** sur $[a, +\infty[$ ou $\int_{-\infty}^{a} f$, f **intégrable** sur $]-\infty, a[$, *avec [**a**, **b**]* $\subset \mathbb{R}$.

- **Intégrale** avec un **paramètre**
  Soient **I** : **partie** de $\mathbb{R}$, **J** : **intervalle** de $\mathbb{R}$ et **f**, **fonction** à **deux variables** telle que :
  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et **F**, fonction définie sur **I** telle que $\forall\, x \in I$, $F(x) = \int_J f(x, t)dt$.

- **Fonction gamma** d'**Euler** **(Γ)** : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.
  $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$, $\Gamma(n + 1/2) = ((2n)!/2^{2n}n!)\sqrt{\pi}$.
  Fonction zêta de **Riemann** **(ζ)** : $\forall\, s \in]1, +\infty[$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^s$. *$\zeta$ est $\mathcal{C}^\infty(]1, +\infty[)$.*
  . $1/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(n)/n^s$ *(où μ est la **fonction** de **Möbius** **définie** à l'**exo 4** de **M3**).*
  . *Vérifier que* $\zeta(s-1)/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)/n^s$ *(où φ est l'**indicatrice** d'**Euler**).*

Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Méthodes** d'**intégration** *de Riemann, trapèzes et Simpson pour* $f : x \longmapsto (1+\ln x)\,x^x$

```python
import math as mt

n, a, b, c, h, u = 500, 0.00, 1.00, 1.00, 0.00, 0.00
v, ire, iri, itr, isi = 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00

def f(x):
    return (1.00 + mt.log(x)) * mt.exp(x * mt.log(x))
def FReelle(x):
    return mt.exp(x * mt.log(x))
def FRieman(x, v):
    return v * f(x)
def FTrapeze(x, v):
    return (f(x) + f(x + v)) * 0.5 * v
def FSimpson(x, v):
    return (v / 6.00) * (f(x) + 4.00 * f(x + 0.5 * v) + f(x + v))

h = (b - a) / n                  ## Pas h de calcul
if a > 0.00:                     ## Bornes a = 0, b = 1
    c = FReelle(a)
ire = FReelle(a + h) - c         ## Initialisations
iri = ire                        ## ire primitive de f avec ire(a) = 0
itr = ire                        ## Méthodes de calcul : iri (Riemann),
isi = ire                        ## itr (trapezes), isi (Simpson)
for i in range(1, n + 1):        ## Calculs des intégrales
    u = a + h * i
    ire = FReelle(u) - c
    if i % 50 == 0:              ## Pas 0.1 pour l'affichage
        print round(u,2),round(ire,8),
        round(iri,8),round(itr,8),round(isi,8)
    iri += FRieman(u, h)
    itr += FTrapeze(u, h)
    isi += FSimpson(u, h)
```

x	FReelle	FRieman	FTrapeze	FSimpson
0.1	-0.20567177	-0.20995314	-0.20583763	-0.20567286
0.2	-0.27522034	-0.28009649	-0.27538800	-0.27522143
0.3	-0.30315470	-0.30833093	-0.30332287	-0.30315579
0.4	-0.30685516	-0.31223176	-0.30702354	-0.30685625
0.5	-0.29289322	-0.29842886	-0.29306168	-0.29289431
0.6	-0.26397808	-0.26965681	-0.26414657	-0.26397917
0.7	-0.22094409	-0.22676395	-0.22111257	-0.22094518
0.8	-0.16348836	-0.16945685	-0.16365680	-0.16348945
0.9	-0.09046742	-0.09659970	-0.09063580	-0.09046852
1.0	0.00000000	-0.00631849	-0.00016829	-0.00000109

*f est $\mathcal{C}^\infty(]0,1])$ et ses **primitives** $x \longmapsto x^x + C$, sont prolongeables par continuité en 0.*

***Comparaison** des résultats des 3 méthodes avec la **primitive F** de **f** pour **F(1) = 0**.*

***Erreurs** des **méthodes** (Cf. (Tay)): **trapèzes** :* $\dfrac{\sup_{]0,1]}|f''|}{12n^2}$ *, **Simpson** :* $\dfrac{\sup_{]0,1]}|f^{(4)}|}{2880n^4}$

*Le **minimal** de **F** sur **]0 , 1]** est atteint en x_0 pour $f(x_0) = 0$, soit pour $x_0 = e^{-1}$.*

- **Compléments** aux **intégrales** de **Riemann** ($\mathbf{f : I = [a,b] \to \mathbb{C}}, \boldsymbol{a, b \in \mathbb{R}, a < b}$)

. **f** est **réglée ssi f** admet une **limite** à **gauche** et à **droite** en **tout point** de **I**.
L'**ensemble** de **points** de **discontinuité** d'une **f° réglée** est **au plus dénombrable**.
Oscillation de **f** en $\mathbf{x_0} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$: $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{f}, \mathbf{x_0}) = \inf\limits_{\gamma>0} \sup\limits_{|x-x_0|<\gamma, |y-x_0|<\gamma} |\mathbf{f(x)} - \mathbf{f(y)}|$.
$\forall\ \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$, $\mathbf{A_\alpha} = \{\mathbf{x_0} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}], \boldsymbol{\omega}(\mathbf{f}, \mathbf{x_0}) \geq \boldsymbol{\alpha}\}$ est **fermé** *(son complémentaire étant **ouvert**)*
$\mathbf{A_\alpha} \subset \mathbf{A}$: **ensemble** des **points de discontinuité** de **f**. Si **A** est **négligeable** *(de **mesure nulle**, cf. ↓)*, $\mathbf{A_\alpha}$ l'est égal[t] et, puisque **compact**, l'**union dénombrable** d'**intervalles ouverts** peut être prise **finie** dans cette **formulation** : $\forall\ \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0},]\mathbf{c_k}, \mathbf{d_k}[_{\mathbf{k} \in [\![1,N]\!]}$ / $\sum_{k=1}^{N} \mathbf{d_k} - \mathbf{c_k} \leq \boldsymbol{\varepsilon}$ et $\mathbf{A_\alpha} \subset \bigcup_{k \in [\![1,N]\!]}]\mathbf{c_k}, \mathbf{d_k}[$ → **f** est **Riemann-intégrable**.

. **Intégrale** de **Kurzweil-Henstock** (**KH**) ou **intégrale** de **Riemann complète**
$\mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, une **subdivision marquée** d'un **intervalle réel**, $\mathbf{I} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ($\boldsymbol{a < b}$) est :
s : $\{(\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}) ; (\mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}, \dots, \mathbf{t_n})\}$ telle que $\mathbf{a} = \mathbf{x_0} < \mathbf{x_1} < \mathbf{x_2} < \cdots < \mathbf{x_n} < \mathbf{b}$ et $\forall \mathbf{i} \in [\![\mathbf{1}, \mathbf{n}]\!]$, $\mathbf{x_{i-1}} < \mathbf{t_i} < \mathbf{x_i}$ *($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \forall \boldsymbol{i} \in [\![\mathbf{1}, \boldsymbol{n}]\!]$ $\boldsymbol{t_i}$ **« marque »** $[\boldsymbol{x_{i-1}}, \boldsymbol{x_i}]$)*.
$\boldsymbol{\delta} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}_+^*$: **jauge** sur **I** et **s** est « **δ-fine** » si $\forall \mathbf{i} \in [\![\mathbf{1}, \mathbf{n}]\!]$, $\mathbf{x_i} - \mathbf{x_{i-1}} < \boldsymbol{\delta}(\mathbf{t_i})$.
Il existe toujours des subdivisions marquées encore plus fines qu'une jauge choisie.
$\mathbf{f : I \to \mathbb{R}}$ est **intégrable** au sens de **KH** si $\forall\ \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$, $\exists \boldsymbol{\delta_\varepsilon}$, **jauge** sur **I** et $\mathbf{s_\varepsilon}$ « $\boldsymbol{\delta_\varepsilon}$**-fine** » tel qu'en notant le réel $\int_a^b \mathbf{f}$, **intégrale** de **KH**, $\left|\int_a^b \mathbf{f} - \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \mathbf{f}(\mathbf{t_{\varepsilon_i}})(\mathbf{x_{\varepsilon_i}} - \mathbf{x_{\varepsilon_{i-1}}})\right| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$.
→ La **dérivée** $\mathbf{f'}$ de **f dérivable** sur **I** est **intégrable** au sens de **KH** et $\int_a^b \mathbf{f'} = \mathbf{f(b)} - \mathbf{f(a)}$

. **Sommes** de **Darboux** : si **f réelle**, **bornée** et **subdivisions s** $= (\mathbf{x_i})_{\mathbf{i} \in [\![1,n]\!]}$ de $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$,
Ces **sommes** sont $\mathbf{d(f,s)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m_i}(\mathbf{x_i} - \mathbf{x_{i-1}})$ et $\mathbf{D(f,s)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M_i}(\mathbf{x_i} - \mathbf{x_{i-1}})$, où $\forall \mathbf{i} \in [\![\mathbf{1}, \mathbf{n}]\!]$, $\mathbf{m_i} = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \mathbf{f(x)}$ et $\mathbf{M_i} = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \mathbf{f(x)}$. *Si $\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}$, **subdivisions** de $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ / $\boldsymbol{s_1} \subset \boldsymbol{s_2}$, on démontre (par réc.), $\boldsymbol{d(f, s_1)} \leq \boldsymbol{d(f, s_2)} \leq \boldsymbol{D(f, s_2)} \leq \boldsymbol{D(f, s_1)}$.*
f est **Darboux-intégrable** ⟺ $\sup\limits_{\text{s : subdivions de f}} \mathbf{d(f,s)} = \inf\limits_{\text{s : subdivions de f}} \mathbf{D(f,s)}$.
Si **f réelle**, **bornée**, **f** est **Darboux-intégrable** ⟺ **f** est **Riemann-intégrable**.

. **Intégrale** de **Lebesgue** *(mesure extérieure d'un intervalle de bornes α, β : $|\beta - \alpha|$)*
Soit **A borné**. On admet **U** : **ouvert** de $\mathbb{R}$ ⟺ $\exists\ ((\mathbf{a_n})_{n \in \mathbb{N}}, (\mathbf{b_n})_{n \in \mathbb{N}})$ / $\mathbf{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]\mathbf{a_n}, \mathbf{b_n}[$
La **mesure extérieure** de **U** est donc $\mathbf{m^*} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{b_n} - \mathbf{a_n}$ et de **A** : $\inf\limits_{\text{U ouvert}, A \subset U} \mathbf{m^*(U)}$.
$\mathbf{A \subset I}$ est **mesurable** si $\mathbf{m^*(A)} = \mathbf{b} - \mathbf{a} - \mathbf{m^*(A^C)} = \mathbf{m_*(A)}$: **mesure intérieure** de **A**
Toute réunion ou intersection dénombrable d'ensembles mesurables l'est également.
$(\mathbf{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ **suite** d'**ens. disjoints mesurables** de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ → $\mathbf{m^*}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A_n}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{m^*(A_n)}$
Soit une **f° étagée** $\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\lambda_k} \mathbf{1_{A_k}}$ où $\boldsymbol{\lambda_k} \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{A_k}$ **mesurables** forment une **partit° Ω**
Si **μ** : **série** de **mesure finie** sur **Ω**, alors $\int_\Omega \mathbf{1_{A_k}} \mathbf{d\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{A_k})$, $\int_\Omega \mathbf{s d\mu} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\lambda_k} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{A_k})$

Ex : . $\mathbf{f_1 : x \longmapsto \sin 1/x, f_1(0) = 0}$ est **Riemann-intégrable** mais **n'est pas réglée**.
. $\mathbf{f_2 : x \longmapsto x^2 \cos x^{-2}}$ sur $]\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, $\mathbf{f_2(0) = 0}$. $\mathbf{f_2}'$ est **KH**- et **non Riemann-intégr**.
. $\mathbf{f_3 : x \longmapsto 1}$ si $\mathbf{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap \mathbf{I}$ et **0 sinon**, **n'est pas Riemann-intégrable** *car :*
$\forall \boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{J} =]\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}[\subset \boldsymbol{I}, \exists \boldsymbol{q} \in \mathbb{Q} \cap \boldsymbol{J}, \forall \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}, \boldsymbol{p} < \boldsymbol{q}, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} / \boldsymbol{p} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{q}$
mais, **méthodes** de **Lebesgue** → $\int_a^b \mathbf{f} = \int_{[a,b]} \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \mathbf{d\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

- **Dérivation** et **intégration** de **fonctions complexes**

Cp^t

. **Définitions**

Un **sous-ensemble U** de ℂ est **connexe** si **deux points quelconques** de **U** peuvent être **rejoints** par une **ligne polygonale incluse** dans **U**. **U ouvert** → **U** est un « **domaine** ». Soit **U** une **partie** de ℂ. **Fonction** d'une **variable complexe** : **application** : **f** : **U** → ℂ. **f(x + i.y) = u(x, y) + i.v(x, y)**, où **u** et **v** sont deux **fonctions** de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Une **fonction analytique** est une **fonction** d'une **variable réelle** ou **complexe** qui est **développable** en **série entière** *(Cf. fiche **M10**)* au **voisinage** de tous **points** de son **domaine** de **définition**. **f** est **holomorphe** en un point $\mathbf{z_0}$ de **U** si cette **limite existe** : $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ (« **dérivée** de **f** en $\mathbf{z_0}$ »). **f** est **holomorphe** sur l'**ouvert U** si elle l'est en **tout point** de **U**. **f** est une **fonction entière** si elle est **holomorphe** dans ℂ.

. **Propriétés**

*Une **fonction analytique** est **holomorphe** et **infiniment dérivable**. Réciproquement, si **f** est **holomorphe** sur un **domaine U** alors elle est **analytique**. L'**ensemble** des **fonctions analytiques** sur un **ouvert** est une **algèbre** : le produit par une **constante** d'une **fonction analytique**, la **somme** et le **produit** de **fonctions analytiques** sont **analytiques**. Lorsqu'elle est **définie**, la **composée** de **fonctions analytiques** est **analytique**. Toute **série entière** de **rayon** de **convergence non nul** définit sur **son disque de convergence** une **fonction analytique**. Toute **fonction polynomiale** est **entière**.*

. **Théorème** de **Cauchy** : Si une **fonction f(z)** est **analytique** dans un **domaine simplement connexe D**, alors, pour **tous** les **contours C** ⊂ **D** et ayant des **extrémités communes**, $\int_C f(z)dz$ a une **valeur unique**. *<u>Dém.</u> pour **f(z) = u(x, y) + i.v(x, y)** et f' continue :* $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$. ***Th. vérifié** car **f** analytique* → *<u>cond° de Cauchy-Riem</u> :* $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ → ∃ ***différentielle totale** sous* $\int_C$
Formule intégrale de **Cauchy**, **dérivée n-ème** *(**n*** $\in \mathbb{N}^*$*)* d'une **fonction analytique**
Soit **f analytique** sur un **domaine simplement connexe Ω**. Pour tout **contour γ orienté positivement** de **Ω**, ∀ z ∈ **Ω**, $\mathbf{f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}du}$, $\mathbf{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}du}$

. **Développement** en **série** de **Laurent** d'une **fonction analytique** **f** sur une couronne, $\mathbf{C = \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq R_1 < |z - z_0| < R_2\}}$: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n}$, *avec* $\forall \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}du}$*, où **γ** ⊂ **C** est un **contour** orienté positivement entourant* $\boldsymbol{z_0}$

. **Application** au **cercle unité C** pour une **fonction f holomorphe** sur un **ouvert** contenant le **disque unité** (fermé) : $\mathbf{\int_C (u + 2 + 1/u)(f(u)/u)du = 4i\pi f(0) + 2i\pi f'(0)}$
En paramétrant le **cercle unité** avec la **fonction bijective u** : $\mathbf{[0, 2\pi[\to C, t \longmapsto e^{it}}$,
pour **f** : **cos**, $\mathbf{\int_0^{2\pi} \cos(e^{it}) \cos^2(t/2)dt = (1/4i)\int_0^{2\pi}(e^{it} + 2 + e^{-it}) \cos(e^{it})idt = \pi}$.

Formulas, propriétés

- **Implications** : f **dérivable** ($\exists$ f ') $\Rightarrow$ f **continue** $\Rightarrow$ f **intégrable** ($\exists \int$ f) $\Rightarrow$ f **définie.**

- Sur **[a, b]**, **moyenne** de **f** , **intégrable** : $\bar{f}_{[a,b]} = \int_a^b \frac{f(x)}{b-a}\,dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)/(b-a)$,
Si **m** $\leq$ **f(x)** $\leq$ **M**, alors **m(b – a)** $\leq \int_a^b f \leq$ **M(b – a)** et m $\leq \bar{f}_{[a,b]} \leq$ M.

- **Relations** de **Chasles** : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$, $\int_a^b f = -\int_b^a f$, $\int_0^a f = -\int_a^0 f$, $\int_a^a f = 0$.

- Soit **f intégrable** sur **[-a, a]**, si **f** est **impaire**, $\int_{-a}^a f = 0$ et si **f** est **paire**, $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.

- **Dérivée** de **composée** de **fonctions dérivables** : $(g \circ f)' = (g' \circ f).f'$.

- **Dérivée** de **fonction réciproque** f^{-1} où **f** et f^{-1} sont **dérivables** : $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$.

- **Formule** de **Leibniz** - **Dérivée** $n^{\text{ème}}$ du **produit** de **f** et **g**, **fonctions n fois dérivables** :
$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}$.

- **Intégration** par **parties (IPP)** : pour **f, g** : $[a,b] \to \mathbb{K}$ *($\mathbb{K}$: corps)* **continues** sur $[a,b]$
et $\mathcal{C}^1([a,b])$ **par morceaux**. Alors, $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$.
Car $\int (f'g + f.g') = \int (f.g)' \to \int f'g = [f.g] - \int f.g'$.

MP

- **Intégration** par **parties généralisée (IPPg)** : $\forall$ **n** $\in \mathbb{N}^*$, **f, g** : $[a,b] \to \mathbb{K}$ *($\mathbb{K}$: corps)*
de **classe** $\mathcal{C}^{n-1}([a,b])$ et $\mathcal{C}^{n}([a,b])$ par **morceaux** $\to$ En **intégrant n** fois par **parties** :
$\int_a^b f^{(n)}(x)g(x)dx = \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(n-k-1)}(x)g^{(k)}(x)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f(x)g^{(n)}(x)dx$.

- **Changement de variables (Cht.var)** : avec φ : $[a,b] \to \mathbb{R}$ de **classe** $\mathcal{C}^1([a,b])$.
et **f**, **application continue** sur un **intervalle** réel **I contenant** $\varphi([a,b])$. Alors :
$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$. *Soit :* $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi)d\varphi$.

- Si **f, g mesurables** sur **intervalle I**. **Inégalité** $\left\|\int_I f\right\| \leq \int_I \|f\|$ et de **Cauchy-Schwarz**
pour **intégrales réelles** ou **complexes** à **carré sommable** : $\left|\int_I f\bar{g}\right| \leq \sqrt{\int_I |f|^2}\sqrt{\int_I |g|^2}$.

- **Critère de Cauchy** pour **intégrales impropres (Cauchy.int)**
Soit **a** $\in \mathbb{R}$, **f CPM** sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **converge ssi** :
$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in [a, +\infty[\;/\; \forall (x,y) \in [a, +\infty[^2,\ y > x \geq A,\ \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \varepsilon$.

- **Règle d'Abel** pour **intégrales (R.Abel.int)**
Soit **a** $\in \mathbb{R}$, **f, g** applications de $[a, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ **converge**.
ssi : . **f** est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$.
. **f** est **décroissante** et a pour limite **0** en $+\infty$.
. **g** est **continue** sur $[a, +\infty[$.
. $\exists M > 0 \;/\; \forall (x,y) \in [a, +\infty[^2,\ \left|\int_x^y g(t)dt\right| \leq M$.

MP

- **Intégrations** *f° dérivable f ↔dérivée f ' ou intégrable f ↔primitive F (sans cste)* **(In)**

F-f	x^{α}	U^{α}	e^x	e^U	$\cos(x)$	$\cos(U)$	$\sin(U)$	$\ln\|x\|$	$\ln\|U\|$
f - f '	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha U' U^{\alpha-1}$	e^x	$U' e^U$	$-\sin(x)$	$-U'\sin(U)$	$U'\cos(U)$	$1/x$	U'/U

F-f	$\ln\|a+x\|$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|$	$\frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$	$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\|a\|}\right)$	$\ln\left\|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\|$	$\tan(x)$
f – f '	$\frac{1}{a+x}$	$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{1}{\sin(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$, $\int \frac{dx}{x.\ln x} = \ln|\ln x| + C$ *car du type* $\int \frac{U'(x)dx}{U(x)}$,

. $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$ *car du type* $\int 2U'(x).U(x)dx$, $\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$,

. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + C$ *car* $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$, $\int \sin x.\cos x\,dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C$,

. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$, $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$ *car du type* $\int x^{\alpha}\,dx$.

. *Pour* ***a, b, c*** $\neq$ ***0, d, e*** *et* ***f réels****, sur tout* ***intevalle ne contenant pas*** $\{-d/c\}$ *:* ***(c0)***

$\int \frac{a}{cx+d}dx = \int \frac{a/c}{x+d/c}dx = \frac{a}{c}\ln|x+d/c| + C$. $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx = \frac{a}{c}x + \frac{b-ad/c}{c}\ln|x+d/c| + C$.

Si $\Delta = d^2 - 4ce \geq 0$ *, sur tout* ***intevalle ne contenant pas*** $\{(-d \pm \sqrt{\Delta})/2c\}$

$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx = \int \frac{\frac{a}{2c}(2cx+d)}{cx^2+dx+e}dx + \int \frac{b-\frac{ad}{2c}}{c(x+d/2c)^2+e-d^2/4c}dx.$

$\rightarrow \int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx = \frac{a}{2c}\ln|cx^2+dx+e| + \int \frac{(b-ad/2c)/c}{(x+d/2c)^2+e/c-d^2/4c^2}dx + C \rightarrow$ Si $c<0$,

$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx = \frac{a}{2c}\ln|cx^2+dx+e| + \frac{(b-ad/2c)/c}{\sqrt{e/c-d^2/4c^2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+d/2c}{\sqrt{e/c-d^2/4c^2}}\right) + C$. Si $c>0$,

$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx = \frac{a}{2c}\ln|cx^2+dx+e| - \frac{(b-ad/2c)/c}{2\sqrt{d^2/4c^2-e/c}}\ln\left|\frac{\sqrt{d^2/4c^2-e/c}+x+d/2c}{\sqrt{d^2/4c^2-e/c}-x-d/2c}\right| + C.$

$\int \frac{ax^2+bx+f}{cx^2+dx+e}dx = \frac{ax}{c} + \int \frac{(b-ad/c)x+f-ae/c}{cx^2+dx+e}dx + C$, **...** *(résolution avec ce qui précède)*

. L'**intégrale abélienne** avec **R**, **fraction rationnelle** à **deux variables**, $p/q \in \mathbb{Q}^*$ et (c0),

$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}\right)dx$ se résoud avec (Cht.var), $\mathbf{u} = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/q}$ puis avec ce qui précède.

. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[X]$, $\int e^{\alpha x}P(x)dx = e^{\alpha x}Q(x) + C$, on obtient $Q \in \mathbb{C}[X]$ avec (IPPg).
Par suite, si $a \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$, *on a* $Q \in \mathbb{R}[X]$ / $\int \cos(ax)\,P(x)dx = \cos(ax)\,Q(x) + C$.

- **Intégrales** de **Riemann** ($a \in \mathbb{R}_+^*$) : si $\alpha > 1$, alors $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ **converge** en $+\infty$ *(limite finie)*, **diverge sinon** et si $\alpha < 1$, alors $\int_0^a \frac{dx}{x^{\alpha}}$ **converge** en **0** *(limite finie)*, **diverge sinon**. **(Rie)**

- **Intégrales** de **Bertrand** ($a, b \in \mathbb{R}_+^*$) : $\int_0^b \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$ **converge** en **0** *(limite finie)* **ssi** $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$) et $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$ **converge** en $+\infty$ **ssi** $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

- **Règles de Bioche** **(R.Bi)** : détermination d'une **intégrale** du type $\int \mathbf{f(\cos x\,,\sin x)dx}$

  - Si $\mathbf{f(\cos x\,,\sin x)dx}$ est **invariante** par **x → – x**, **dx → – dx**,
    on prend alors le changement de variable : **t = cos x** (→ dt = – sin x.dx).
  - Si $\mathbf{f(\cos x\,,\sin x)dx}$ est **invariante** par **x →** $\boldsymbol{\pi}$ **– x**, **dx → – dx**,
    on prend alors le changement de variable : **t = sin x** (→ dt = cos x.dx).
  - Si $\mathbf{f(\cos x\,,\sin x)dx}$ est **invariante** par **x →** $\boldsymbol{\pi}$ **+ x**, **dx → dx**,
    on prend alors le changement de variable : **t = tan x**
    (→ dt = $(1 + \tan^2 x)$dx, soit dt = $(1 + t^2)$dx).
  - **Sinon**, on prend le changement de variable : **t = tan (x/2)**
    (→ 2dt = $(1 + t^2)$dx, cos x = $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, sin x = $\frac{2t}{1+t^2}$, tan x = $\frac{2t}{1-t^2}$)
  - *Pour* $\int \boldsymbol{f(ch\,x\,,sh\,x)dx}$, *on applique les* ***règles précédentes***
    à $\int f(\cos x\,,\sin x)dx$ *puis la* ***fonction hyperbolique correspondante*** *du changement de variables sauf pour* ***t = tan (x/2)*** *où l'on utilise* ***t = exp(x)***.

- **Théorème de continuité** d'une **intégrale** avec un **paramètre**

  Rappel : **I** : partie de ℝ, **J** : **intervalle** de ℝ et une **fonction** à **deux variables**,
  f : I × J → 𝕂 = ℝ ou ℂ et **F** **fonction** définie sur **I** telle que ∀**x**∈**I**, **F(x)** = $\int_J \mathbf{f(x,t)dt}$.
  Si ∀**t**∈J, **f** est **continue** pour la 1ère variable *(x)* sur **I** et **CPM** pour la 2ème *(t)* sur **J**
  et si ∃ une fonction $\boldsymbol{\varphi}$ **CPM**, **positive**, **intégrable** sur **J** / ∀(**x**,**t**)∈**I** × **J**, $|\mathbf{f(x,t)}| \le \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$
  Alors, **F** est **définie** et **continue** sur **I**.

- **Théorème de dérivation** **(Leibniz)** d'une **intégrale** avec un **paramètre**

  Si ∀x∈I, **f** est **continue** pour la 2ème variable *(t)* sur **J** et **intégrable** sur **J**,
  si $\frac{\partial f}{\partial x}$ (x,t) est **définie** sur **I × J**, **continue** ∀t∈J, pour **x**∈**I** et **CPM** ∀**x**∈**I**, pour **t**∈**J**.
  et si ∃ une **fonction** $\boldsymbol{\varphi}$ **CPM, positive** sur J / ∀ (x, t) ∈ I × J, $\left|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{t})\right| \le \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$.
  Alors, **F** est **définie**, de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur **I** et ∀ **x** ∈ **I**, **F'(x)** = $\int_J \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{t})\,\mathbf{dt}$.

- **Théorème de dérivation (généralisation)** d'une **intégrale** avec un **paramètre**

  . Si ∀**x**∈**I**, **f** est **CPM** pour la 2ème variable ***(t)*** sur **J** et **intégrable** sur **I** en admettant des **dérivées partielles** $\forall \mathbf{k} \in [\![\mathbf{1},\mathbf{n}]\!]$, $\frac{\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}}$ $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*)$ **vérifiant** :
  . $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ (x,t) est **définie** sur **I × J**, **continue** ∀**t**∈**J** pour **x**∈**I** et **CPM** ∀**x**∈**I**, pour **t**∈**J**.
  . ∃ des **fonctions** $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}\in[\![1,n]\!]}$ **CPM, positives** sur **J** / ∀ (**x**, **t**) ∈ **I** × **J**, $\left|\frac{\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}}(\mathbf{x},\mathbf{t})\right| \le \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})$.
  Alors, **F** est **définie**, de **classe** $\mathcal{C}^{\mathbf{n}}$ sur **I** et ∀**k**∈$[\![\mathbf{1},\mathbf{n}]\!]$, ∀**x**∈**I**, $\mathbf{F^{(k)}(x)} = \int_J \frac{\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{k}}}(\mathbf{x},\mathbf{t})\mathbf{dt}$.

Exercices d'application et grands classiques

Énoncés *(Calculs des primitives si définies sur au moins un intervalle réel et des intégrales entre a et b, réels tels que a ≤ b, si existence ou bien si leur primitive correspondante est définie sur l'intervalle réel ouvert]a, b[et converge en a et en b pour le cas des intégrales impropres.)*

- **1.** Calcul de $\int \sin^3 x dx$, de $\int dx/(1+\sin^2 x)$, puis de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos^2 x} dx$.

- **2.** Calcul de $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

- **3.** Calcul de $\mathbf{I} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^y \cos(\sin y) . \sin 2y . \cos x . \exp(\sin x) dx dy$.

- **4.** Convergence et calcul de l'**intégrale impropre** $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}$.

- **5.** Déterminer pour une fonction **f continue** et **strictement positive** sur $[0,1]$, et si elle existe, $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \left(\int_0^1 (f(x))^\alpha dx\right)^{1/\alpha}$. *(Cf. Oral ENS)*

- **6.** Soient deux réels **a**, **b** > **a** et **f** de classe $\mathcal{C}^1([a,b])$ telle que $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) > 0$.
  Déterminer $\forall x \in [a,b]$, $I(x) = \int_a^x f(u) du + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(v) dv$.

- **7.** Soit **f** : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ / $\int_0^{+\infty} f$ **convergente**. Montrer que **f décroissante** $\Longrightarrow \lim\limits_{+\infty} f = 0$.
  Déterminer des **exemples** de **f positive non décroissante n'impliquant pas** $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

- **8.** Soit **f**, $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2$ **convergent**.
  Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2$ **converge** et $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 . \int_{-\infty}^{+\infty} f''^2$.

- **9.** Etude de la suite **W** de terme général $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u) du$, **intégrale** de **Wallis**.
  *(D'après CAPES, cf. fiche **M8**)*
  Montrer pour $n \in \mathbb{N}$ que $W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n$, en déduire $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$
  et $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$, puis déterminer un **équivalent** de W_n en $+\infty$.
  Etudier les suites **u**, **v** de termes généraux $u_n = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ et $v_n = \ln \frac{u_n}{u_{n-1}}$.
  En déduire la **convergence** de $\sum v_n$.
  En déduire la **formule** de **Stirling** pour $n \to +\infty$, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Corrigés *(en vérifiant a priori ou a posteriori l'existence des* $\int \ldots$ *,* $\int_a^b \ldots$ *et en utilisant (In))* :

- **1.** (R.Bi) ou $\forall\, \mathbf{x}$, $\mathbf{sin^3x} = \mathbf{sin\,x}\left(\mathbf{1 - cos^2x}\right) \to \int \mathbf{sin^3x\, dx} = \mathbf{(1/3)\, cos^3\, x - cos\, x + C}$.
  Et (R.Bi), $\forall\, \mathbf{x} \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathbf{t = tan\, x} \to \int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{1+sin^2x}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{Arctan}\left(\sqrt{2}\,\mathbf{tan\, x}\right) + \mathbf{C}$.
  Avec (Cht.var) de $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}/\mathbf{2}] \to [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, $\mathbf{u = cos(x)}$, $du = -\sin(x)dx$, puis $v = u/\sqrt{2}$,
  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathbf{sin\, x}}{\mathbf{2+cos^2\, x}}\mathbf{dx} = \int_0^1 \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{1+(u/\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{1+v^2}} = \frac{\sqrt{2}\mathbf{Arctan}(\sqrt{2}/2)}{\mathbf{2}}$

- **2.** Avec (Cht.var) pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{u} = \sqrt{\mathbf{x}}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2u}dx$, d'où $dx = 2udu$,
  $\int_1^2 \frac{\mathbf{ln\, x}}{\sqrt{\mathbf{x}}}\mathbf{dx} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2u.\ln u^2}{u}du = 4\int_1^{\sqrt{2}} \ln u\, du = 4[u(\ln u - 1)]_1^{\sqrt{2}} = \mathbf{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{ln\, 2} - \sqrt{2} + \mathbf{1}\right)$

- **3.** Sur $\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\int_0^y \cos(x)\exp(\sin(x))dx = \exp(\sin(y)) - 1$ et $y \mapsto \cos(\sin(y))\sin(2y)$
  étant impaire, $\mathbf{I} = 2\int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \cos(\sin(y))\sin(y)\exp(\sin(y))\cos(y)dy \to$ Avec (Cht.var),
  $\mathbf{u = sin(y)}$, $\mathbf{I} = \mathbf{2}\mathfrak{Re}\int_{-\sqrt{2}/2}^{+\sqrt{2}/2} \mathbf{u.\, exp((1+i)u)du}$, puis (IPP) $\to$ $\mathbf{I = \ldots}$

- **4.** $\mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[3]{\mathbf{2x^2 - x^3}}}$ est **continue** sur $]0, 2[$ et $\int_0^2 \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt[3]{\mathbf{2x^2-x^3}}}$ **converge** en **0** et en **2** car :
  En 0, $\frac{1}{\sqrt[3]{2x^2-x^3}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2x^2}} = \frac{x^{-2/3}}{\sqrt[3]{2}}$, or $\int x^{-2/3} = x^{1/3} + C$. En 2, $u = 2 - x \to 0$,
  $\frac{1}{\sqrt[3]{2x^2-x^3}} \sim \frac{2^{-2/3}}{\sqrt[3]{u}} = 2^{-2/3}u^{-1/3}$ or $\int u^{-1/3} = u^{2/3} + C$ *(Cf. (Rie))*. Avec (Cht.var),
  $\mathbf{u(x)} = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x}} - \mathbf{1}}$, $\frac{du}{dx} = \left(\frac{-2}{3x^2}\right)\left(\frac{2}{x} - 1\right)^{-2/3} \to \mathbf{dx} = \left(\frac{-3x^2}{2}\right)\mathbf{u^2du}$ et $u^3 = \frac{2}{x} - 1 \to \mathbf{x} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1+u^3}}$
  Donc, $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2x^2-x^3}} = \int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}} = \int_0^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)\frac{x^2u^2}{xu}du = \left(\frac{3}{2}\right)\int_0^{+\infty}\frac{2u}{1+u^3}du = \int_0^{+\infty}\frac{3u}{1+u^3}du$.
  Alors, $\int_0^2 \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt[3]{\mathbf{2x^2-x^3}}} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$ car $1 + u^3 = (1+u)(1-u+u^2)$, donc $\frac{3u}{1+u^3} = \frac{a}{1+u} + \frac{bu+c}{1-u+u^2}$
  et en identifiant $\frac{3u}{1+u^3} = \frac{-1}{1+u} + \frac{u+1}{1-u+u^2} = \frac{-1}{1+u} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{2u-1}{1-u+u^2} + \left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{(u-1/2)^2+3/4}$
  $\to \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2x^2-x^3}} = \left[-\ln(1+u) + (1/2)\ln(u^2 - u + 1) + \sqrt{3}\mathrm{Arctan}\left((2/\sqrt{3})(u - 1/2)\right)\right]_0^{+\infty}$

- **5. f continue** sur le **compact** $[0,1]$ y atteint ses bornes : $\exists \mathbf{m, M}/\mathbf{m \leq f(x) \leq M}$. Ici $\mathbf{m>0}$
  Pour $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\mathbf{I}(\boldsymbol{\alpha}) = \left(\int_0^1 (\mathbf{f(x)})^{\alpha}\mathbf{dx}\right)^{1/\alpha} = \exp\left((1/\alpha)\ln\int_0^1 \exp(\alpha \ln f(x))dx\right)$.
  (Tay) pour **exp** et **f** étant **bornée** sur $[0,1] \to \exists \mathbf{K} \in \mathbb{R}_+^* / \left|(f(x))^{\alpha} - 1 - \alpha \ln f(x)\right| \leq K\alpha^2$.
  En **intégrant**, $\mathbf{ln\, I(\alpha) = (1/\alpha)\left(\alpha\int_0^1 ln\, f(x)\, dx\right) + O(\alpha)} \to \lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathbf{I}(\alpha) = \mathbf{exp}\left(\int_0^1 \mathbf{ln\, f}\right)$.

- **6.** <u>Dém1</u> avec les **graphes sym.** de **f** et **f** $^{-1}$. <u>Dém2</u> : $\mathbf{I} \in \mathbf{D^1([a, b])}$ où $\mathbf{I'(x) = f(x) + xf'(x)}$
  Or (IPP) $\to \int_a^x \mathbf{uf'(u)du} = [\mathbf{uf(u)}]_a^x - \int_a^x \mathbf{f(u)du} \to \forall\, \mathbf{x} \in [\mathbf{a, b}]$, $\mathbf{I(x) = xf(x) - af(a)}$.

- **7.** $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ / $\int_0^{+\infty} \mathbf{f\ cv}$. $\mathbf{f} \searrow \Longrightarrow$ **f positive** et $\forall\, \mathbf{x} \in [\mathbf{1}, +\infty[$, $\int_x^{x+1}\mathbf{f} \leq \mathbf{f(x)} \leq \int_{x-1}^{x}\mathbf{f}$.
  $\to \lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x-1}^{x}\mathbf{f = 0} \Longrightarrow \lim\limits_{+\infty}\mathbf{f = 0}$. Pour **f** valant $\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{n^{\alpha}}$ sur $\left[\mathbf{n, n + n^{-\beta}}\right]$ et **0 sinon**,
  si $\boldsymbol{\beta > \alpha + 1 \geq 1}$, $\int_0^{+\infty}\mathbf{f}$ **cv** et $\lim\limits_{+\infty}\mathbf{f \neq 0}$. <u>*Ex*</u> *:* $\boldsymbol{\beta = \alpha + 2} \to \int_0^{+\infty} \boldsymbol{f = \pi^2/6}$ *(Cf* ***M11*** *- (s2))*

- **8.** Sur tout **intervalle I** de $\mathbb{R}$, $\mathbf{(f.f')' = f'^2 + f.f''} \longrightarrow \forall\, \mathbf{x, y} \in \mathbb{R}$,
$\int_x^y \mathbf{f.f''} = [\mathbf{f.f'}]_x^y - \int_x^y \mathbf{f'^2}$. Donc, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f.f''}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f'^2}$ **converge** car sinon,
$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{f(x).f'(x)} = \pm\infty$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{f^2(x)} = \pm\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f^2}$ **ne convergerait pas**.
L'**inégalité** se déduit de celle de **Cauchy-Schwarz** *(Cf. fiche **M16**)* appliquée à une **norme** des **fonctions continues** sur **[x, y]**, $\mathbf{u} \longmapsto \int_x^y \mathbf{u^2(t)dt}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathbf{f(x).f'(x) = 0}$.

- **9.** Suite **W** de terme général $\mathbf{W_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{\cos^n(u)\,du}$, intégrale de **Wallis.** On obtient
$\mathbf{W_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{\sin^n(u)\,du}$ par le ch[t] de variables bijectif, C^1 de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $u : x \longmapsto \frac{\pi}{2} - x$.
W est **strictement décroissante** car cos est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(u) \in]0,1[$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,.\cos^{n+1}(x)\,dx$, donc par (IPP),
$W_{n+2} = [\sin x\,.\cos^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin x\,(-\sin x)\cos^n(x)dx$
$\longrightarrow W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin^2 x\cos^n(x)dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^n(x)dx$, soit :
$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, d'où $\mathbf{W_{n+2}} = \left(\mathbf{\frac{n+1}{n+2}}\right)\mathbf{W_n}$.
$\mathbf{W_0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{\pi}{2}}$, $\mathbf{W_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{1} \longrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^*$,
$\mathbf{W_{2p}} = \left(\frac{2p-1}{2p}\right)\left(\frac{2p-3}{2p-2}\right)\ldots\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)W_0 = \frac{\pi(2p)(2p-1)(2p-2)\ldots\times3\times2\times1}{2\left((2p)(2p-2)\ldots\times4\times2\right)^2} = \mathbf{\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}}\times\mathbf{\frac{\pi}{2}}$
$\mathbf{W_{2p+1}} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right)\ldots\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)W_1 = \frac{\left((2p)(2p-2)\ldots\times4\times2\right)^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)\ldots\times3\times2\times1}\times1 = \mathbf{\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1}$. Donc la suite de terme général
$(n+1)W_nW_{n+1}$ est constante $\longrightarrow (n+1)W_nW_{n+1} = W_0W_1 = \pi/2 \longrightarrow \mathbf{W_nW_{n+1}} = \mathbf{\frac{\pi}{2(n+1)}}$
W ↘ strictement et $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0 \longrightarrow \frac{W_{n+2}}{W_n} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1 \longrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$.
$\longrightarrow$ En $+\infty$, $\mathbf{W_{n+1}} \sim \mathbf{W_n}$, $\mathbf{W_n^2} \sim \mathbf{W_nW_{n+1}} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \mathbf{\frac{\pi}{2n}}$, donc $\mathbf{W_n} \sim \sqrt{\mathbf{\frac{\pi}{2n}}}$ en $+\infty$.
Suites **u, v** / $\mathbf{u_n} = \mathbf{\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}}$, $\mathbf{v_n} = \mathbf{\ln\frac{u_n}{u_{n-1}}} = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \times \frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{(n-1)!e^{n-1}}\right) = \ln\left(e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1/2}\right)$
$\longrightarrow \mathbf{v_n = 1 + (n - 1/2)\ln(1 - 1/n)}$. Avec un DL à l'ordre 3 de ln, on obtient alors :
$\mathbf{v_n} = 1 + (n - 1/2)\left(-1/n - 1/2n^2 - 1/3n^3 + o(n^3)\right) = \mathbf{-1/12n^2 + o(n^2)}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et la série $\sum 1/n^2$ étant convergente, $\sum \mathbf{v_n}$ est **convergente**.
$\forall n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right) = \sum_{k=2}^n (\ln(u_k) - \ln u_{k-1}) = \ln(u_n) - \ln u_1 = \ln(u_n) - 1$
$\longrightarrow$ La suite de terme général $\mathbf{\ln(u_n)}$ est **convergente** comme l'est la série $\sum \mathbf{v_n}$.
ln étant **continue**, bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ de fonction inverse exp, continue,
la suite **u cv** donc vers $\mathbf{K} = \exp\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n\right) > 0 \longrightarrow \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim K \longrightarrow \mathbf{n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}$.
$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \longrightarrow$ En $+\infty$, $W_{2p} \sim \frac{K\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}\sqrt{2p}}{2^{2p}\left(K\left(\frac{p}{e}\right)^p\sqrt{p}\right)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{2^{2p}\sqrt{2p}}{2^{2p}Kp} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{K}\sqrt{\frac{1}{2p}}$.
Or $W_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}} \longrightarrow \frac{\pi}{K} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\mathbf{K = \sqrt{2\pi}}$, puis $\mathbf{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}$: formule de **(Stirling)**