

# FICHES DES CONCOURS D'ENTRÉE AUX GRANDES ÉCOLES D'INGÉNIEURS

*Synthèse de cours, TP et exercices  
en mathématiques, informatique, physique et chimie  
Édition 2025*

## ***Errata et compléments***

***Filière MPSI, MP2I / MP, MPI :***



***Filière PCSI / PC :***



***Filière MPSI, PCSI, PTSI / PSI, PT, TSI :***



***Compléments :***



Les “print” des TP de math en python doivent être complétés avec des “(...)”.

## Fiche M4 – Fonctions réelles et leur étude

### Exercices d’application et grands classiques

- Exo 1 :  $\exists k, j, l \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket$

## Fiche M15 – Algèbre linéaire - Matrices

### Travaux pratiques et approche expérimentale

- Relations déterminants – traces  
...  $\forall k \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket, M_k = \dots$

## Fiche M17 – Polynômes, fractions rationnelles

### Travaux pratiques et approche expérimentale

- $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} : P(X) = \pm X + a$ , où  $a \in \mathbb{Z}$ .

# MÉMO DES CONCOURS D'ENTRÉE AUX GRANDES ÉCOLES D'INGÉNIEURS

*Fiches de cours, TP et exercices  
en mathématiques, informatique, physique et chimie  
Édition 2024*

## ***Errata et compléments***

***Filière MPSI, MP2I / MP, MPI :***



***Filière PCSI / PC :***



***Filière MPSI, PCSI, PTSI / PSI, PT, TSI :***



***Compléments :***



Les "print" des TP de math en python doivent être complétés avec des "...".

## Fiche M1 – Topologie et ensembles

- Ouvert A** de E : sous – ensemble de E qui est voisinage de chacun de ses points. Il correspond à son intérieur  $\overset{\circ}{A}$ , ne contenant aucun point de sa frontière,  $\text{Fr } A$  (notée également «  $\text{Fr}(A)$  » ou «  $\partial A$  »).  $\text{Fr } A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .  
 $\overline{A}$  étant l'adhérence de A : plus petit ensemble fermé contenant A. Pour un espace métrique, il est l'ensemble des limites de suites convergentes à valeurs dans A.  
**Fermé F** de E : sous – ensemble de E, de complémentaire  $C_E F = E \setminus F$ , ouvert de E.
- Sous-corps J** de  $\mathbb{K}$  : partie de  $\mathbb{K}$  stable pour les lois + et  $\times$ , tel que :  
 $1_{\mathbb{K}} \in J$  et  $\forall x \in J, -x \in J, \forall x \in J \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, (\exists x^{-1} \in \mathbb{K}) x^{-1} \in J$ .  
*J est lui-même un corps pour les lois + et  $\times$ .  $\mathbb{R}$  est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .*
- Toute partie non vide et majorée** de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure.  
*L'ensemble  $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$  n'a pas de borne supérieure.*
- Pour  $\mathbb{K}$  : sous-corps de  $\mathbb{C}$ , dans E =  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  
 $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}^*, \|\cdot\|_{\mathbf{k}} : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (|x_1|^{\mathbf{k}} + \dots + |x_n|^{\mathbf{k}})^{1/\mathbf{k}}$ .  
 $\|\cdot\|_{\infty} : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sup(|x_1|, \dots, |x_n|)$ .
- Propriété de la norme infinie** sur un  $\mathbb{K}$ -ev ( $\mathbb{K}$  : sous-corps de  $\mathbb{C}$ ) :  $\|\cdot\|_{\infty} = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \|\cdot\|_{\mathbf{k}}$  :  
 Soient  $J = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_i| = \|\mathbf{x}\|_{\infty}\}$ ,  $I = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus J$ .  $p = \text{card}(J) : "[J]"$ .  $\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N}^*$ ,  
 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{k}} = \|\mathbf{x}\|_{\infty} (p + \sum_{i \in I} (|x_i|/\|\mathbf{x}\|_{\infty})^{\mathbf{k}})^{1/\mathbf{k}}$  et  $\lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} (p + \sum_{i \in I} (|x_i|/\|\mathbf{x}\|_{\infty})^{\mathbf{k}})^{1/\mathbf{k}} = 1$ .

### Exercices d'application et grands classiques

- Exo 4 suite** (Cf. CCP-oral) : Soient I, J, idéaux de l'anneau A.  
 $\sqrt{I}$  est un idéal de A qui contient I.  
 $\sqrt{0} = \{a \in A, \exists p \in \mathbb{N}^*, a^p = 0\}$  est un idéal de A.  
 $I \subset J \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}, \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$  et  $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ .

# Fiche M4 – Fonctions réelles et leur étude

## Définitions

- **Exemple de fonction continue mais non uniformément** sur  $\mathbb{R}$  :  $f : x \mapsto x \cdot \sin(x)$  car :  
**f : produit de fonctions continues** sur  $\mathbb{R}$  mais par exemple, pour  $n \in \mathbb{N}$  :  
 $f(2n\pi + 1/n) - f(2n\pi) \sim_{\infty} 2n\pi/n = 2\pi$  qui infirme l'uniformité.

## Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Recherche de fonctions** d'après des équations fonctionnelles.  
*Méthode 1 : comprend le domaine et ses extensions (Ex :  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ )*
- **Propriétés de fonctions gamma, d'Euler et zêta  $\zeta$  de Riemann**  
*Produit de Cauchy de  $\sum n^{-s}$ ,  $\sum \mu(n)n^{-s}$  pour obtenir  $\zeta(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(n)n^{-s} = 1$ .  
et de même  $\sum n^{-s} \sum \varphi(n)n^{-s}$  pour  $\zeta(s) \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)n^{-s} = \zeta(s-1)$ .  
( $\forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1$  et où  $\mu$  : fonction de Möbius,  $\varphi$  : indicatrice d'Euler)*
- **Fonction bêta** :  $\forall x, y \in \mathbb{C}, \Re(x) > 0, \Re(y) > 0, \beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ .  
 **$\beta$  est symétrique.** Avec le changement de variable tel que  $t = 1/(1+u)$ ,  
 $\beta(x, y) = \int_0^1 u^{y-1}/(1+u)^{x+y} dt$ .  
On vérifie  $\beta(x, y+1) = (y/(x+y))\beta(x, y)$  et  $\beta(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ .  
 $\frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x} = \beta(x, y)(\psi(x) - \psi(x+y))$ ,  $\frac{\partial \beta(x, y)}{\partial y} = \beta(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y))$ ,  
où la f° psi :  $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ . vérifie  $\psi(x) = -\gamma - x^{-1} + x \sum_{k=1}^{+\infty} 1/k(k+x)$ .  
Pour  $|x| < 1$ ,  $\psi(x+1) = -\gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(k+1)(-x)^k$ .  
Pour  $\Re(x) > -1$ ,  $\psi(x+1) = -\gamma - \sum_{k=1}^{+\infty} ((-1)^k/k) \binom{x}{k}$ ,  
où le coefficient binomial généralisé,  $\binom{x}{k} = x(x-1) \dots (x-k+1)/k!$ .

# Fiche M5 – Dérivations, intégration et primitives

## Formules, propriétés

- Si  $f$  : fonction continue,  $g$  : fonction intégrable, de signe constant sur  $[a, b]$  et non identiquement nulle, alors  $\exists c \in [a, b] / \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$ .

# Fiche M8 – Suites

## Formules, propriétés

- Toute suite convergente est nécessairement de Cauchy.

## Exercices d'application et grands classiques

- **Exo 1 – corrigé** :  $u, v$  de terme général,  $u_n = \sum_{k=0}^n (1/k!)$  et  $v_n = u_n + 1/nn!$  sont adjacentes car :  $u \nearrow$  (Cf. SATP),  $v \searrow : \forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  
 $v_{n+1} - v_n = (1 + 1/(n+1))/(n+1)! - 1/nn! = -1/n(n+1)(n+1)! < 0$   
et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0 \rightarrow$  Limite commune  $\ell$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n < \ell < v_n$ .  
Egalement,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists \lambda_n \in ]0, 1[$  tel que  $\ell = \sum_{k=0}^n (1/k!) + \lambda_n/nn!$ .  
On a alors  $\ell = e$  (Cf. (Tay)), qui est irrationnelle car, par l'absurde :  
Si  $\exists p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \wedge q = 1$  tels que  $\ell = e = p/q$ , on a alors :  
 $q! u_q < q! e < q! v_q$ , soit :  $q! u_q < q! e < q! u_q + 1/q < q! u_q + 1$ .  
Or  $q! u_q = \sum_{k=0}^q (q!/k!)$ , somme d'entiers est un entier et  $q! e = (q-1)! p$ ,  
également entier, serait encadré strictement par  $q! u_q$  et  $q! u_q + 1$  : absurde.

## Fiche M9 – Sommations et séries

- **Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes**,  $\sum_{i \geq 0} u_i$  et  $\sum_{j \geq 0} v_j$ ,  
la série  $\sum_{k \geq 0} w_k$  (tel que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $w_k = \sum_{i,j \geq 0 \text{ et } i+j=k} u_i v_j = \sum_{0 \leq i \leq k} u_i v_{k-i}$ ) est  
également absolument convergente et de somme :  $\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_i \sum_{k=0}^{+\infty} v_j$ .
- $\sum_{k=1}^n kq^k = \dots$  avec la dérivée de  $x \mapsto (x^{n+1} - 1)/(x - 1)$ .

## Fiche M11 – Transformées de Laplace et de Fourier

### Travaux pratiques et approche expérimentale

- $u_E - Ri = u_S = i/jC\omega \dots$

## Fiche M13 – Algèbre générale (Introduction)

### Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Z(g)** : sous-groupe de  $C(g)$ , sous-groupe de  $G$  avec inclusions exclusives  
(donc de cardinaux en rapport minimum de 2 entre chaque, cf. Th. de Lagrange)
- **Algèbres de Lie** (introduction à la géométrie différentielle en théorie des champs)  
. Un groupe de Lie,  $G$ , est un groupe muni d'une structure de variété différentielle pour laquelle sa loi « . » et le passage à l'inverse sont différentiables.  
**Groupes de Lie classiques** :  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $GL_n(\mathbb{K})$ ,  $SL_n(\mathbb{K}) = \{x \in GL_n(\mathbb{K}), \det x = 1\}$  ;  
**Groupes orthogonaux** :  $O_n(\mathbb{R}) = \{x \in GL_n(\mathbb{R}), {}^t x x = id\}$ ,  $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$ ,  
 $O(p, q)(\mathbb{R}) = \{x \in GL_{p+q}(\mathbb{R}), {}^t x I_{pq} x = id\}$ ,  $SO(p, q)(\mathbb{R}) = O(p, q)(\mathbb{R}) \cap SL_{p+q}(\mathbb{R})$  ;  
**Groupes unitaires** :  $U(n, \mathbb{K}) = O_n(\mathbb{K})$ ,  $SU(n, \mathbb{K}) = SO_n(\mathbb{K})$ ,  $U(n, \mathbb{C})$  est égal<sup>t</sup> noté  $U(n)$ .

## Fiche M15 – Algèbre linéaire - Matrices

- $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  est **dense** dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  car :  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\chi_A$  est **scindé**,  $\mathbf{Sp}(\chi_A) = \{\lambda_k\}$ .  
 $A$ , semblable à une **matrice triangulaire supérieure**, si  $A \neq \mathbf{0}_n$ , soit  $F$ ,  $\mathbb{C}$ -ev de dim.  $\mathbf{rg}(A)$  avec **diagonale** de  $A|_F$  **non nulle** et  $G$  son **supplémentaire** dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Il existe alors  $\lambda_* = \min(|\lambda_k|, \lambda_k \in \mathbf{Sp}(\chi_{A|_F}), \lambda_k \neq 0)$  et  $\forall \alpha, \beta \in ]0, \lambda_*[ \times ]0, +\infty[$ ,  $A - \alpha I_F + \beta I_G \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  et donc  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbf{B}(A, \alpha) \neq \emptyset$  ( $\mathbf{B}(A, \alpha)$  : *boule* de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ).  
 Si  $A = \mathbf{0}_n$ ,  $\forall \alpha, \beta \in ]0, +\infty[$ ,  $\beta < \alpha$ ,  $\beta I_n \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbf{B}(\mathbf{0}_n, \alpha) \neq \emptyset$ .
- **Relations déterminant – trace** ( $\mathbb{K}$  : *sous-corps* de  $\mathbb{C}$ ) (Cf. *algorithme de Faddeev*)  
 Si  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ,  $\det(A) = (1/2) \left( (\mathbf{tr}(A))^2 - \mathbf{tr}(A^2) \right)$ .  
 Si  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ ,  $\det(A) = (1/6) \left( (\mathbf{tr}(A))^3 - 3\mathbf{tr}(A^2)\mathbf{tr}(A) + 2\mathbf{tr}(A^3) \right)$ , ...  
 Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\det(A) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^n ik_i = n}} (-1)^{1+k_i} / (i^{k_i} k_i!) \mathbf{tr}(A^i)^{k_i}$ .  
**Formule de Jacobi** :  
 Si  $t \mapsto A(t) \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ ,  $\frac{d\det(A(t))}{dt} = \det(A(t)) \cdot \mathbf{tr} \left( A^{-1}(t) \frac{d(A(t))}{dt} \right)$ .  
 Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\det(\exp A) = \exp(\mathbf{tr}(A))$ .

## Fiche M16 – Espaces préhilbertiens et euclidiens

### Définitions

- **Forme bilinéaire**,  $\varphi : E^2 = E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  **linéaire** par rapport aux **deux variables**.  
 Si de plus,  $\varphi$  est **symétrique** ( $\forall (u, v) \in E^2$ ,  $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ ),  
 $\varphi$  est alors une **forme bilinéaire symétrique**, notée « **fb** ».
- **Forme quadratique**,  $q : E \rightarrow \mathbb{K}$  si  $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$  et  $\varphi : (u, v) \mapsto (q(u+v) - q(u) - q(v))/2$  : **fb**.  
 $\varphi$  : **forme polaire** de  $q \rightarrow \varphi(u, u) = q(u)$ ,  $u \perp v$  par rapport à  $q$  si  $\varphi(u, v) = 0$ .  
 Si  $q$  est **définie positive** ( $\forall u \in E$ ,  $q(u) \geq 0$  et si  $q(u) = 0$  alors  $u = \mathbf{0}_E$ ) (*hors programme*),  
 la **forme polaire** est un **produit scalaire de norme associée**  $x \mapsto \sqrt{q(x)}$ . (**Pscal**)
- **Espaces préhilbertiens**
  - **Espace préhilbertien réel** :  $E$ ,  $\mathbb{R}$ -ev muni d'un **produit scalaire**  $\varphi$ , qui est une **forme bilinéaire symétrique définie positive**.  
 On note  $\varphi(x, y) : (x|y)$  et  $\varphi(x, x) = q(x) = \|x\|^2$ .

### Formules, propriétés

( $\mathbb{K}$  est un *sous-corps* de  $\mathbb{C}$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ ev de *dimension finie*,  $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ )

- **Théorème spectral (ThSp)**. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , **symétrique** et  $E$  : **espace euclidien**.  
 Alors  $E$  est **somme directe orthogonale** des **sous-espaces propres** de  $u$ .  
 Pareillement, il **existe** une **base orthonormale diagonalisant**  $u$ .

# Fiche M17 – Polynômes, fractions rationnelles

## Définitions

**Polynôme**  $P \in \mathbb{K}[X]$  pour  $\mathbb{K}$  : sous-corps de  $\mathbb{C}$ ,  $\sum_{k \geq 0} a_k X^k$  de coefficients  $a_k \in \mathbb{K}$ .

## Exercices d'application et grands classiques

Corrigés (Cf. (Div.e)) ( $\forall x, y \in \mathbb{R}$ )

### 9. Polynômes complexes et borne de Cauchy

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , où  $a_n \neq 0$  et  $a_k \in ]0, n-1]$  non tous nuls.

Soit le polynôme réel  $Q$ ,  $Q(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} (|a_k|/|a_n|) X^k$  et la fonction  $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ ,  $h(x) = Q(x)/x^n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  $\rightarrow h \searrow$  (strict.) sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ .

...

# Fiche I1 – Informatique

## Exercices d'application et grands classiques

### Exo 4 : $\sum_{k=0}^n E(\sqrt{k}) = U_n + R_n$ , où, avec $\sqrt{N} = E(\sqrt{n})$ ,

$$U_n = \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})-1} \sum_{j=k^2}^{(k+1)^2-1} k = \sum_{k=0}^{\sqrt{N}-1} (2k+1)k = 2 \sum_{k=0}^{\sqrt{N}-1} k^2 + \sum_{k=0}^{\sqrt{N}-1} k,$$

$$U_n = (\sqrt{N}-1)\sqrt{N}(2\sqrt{N}-1)/3 + (\sqrt{N}-1)\sqrt{N}/2.$$

$$\text{et le reste, } R_n = \sum_{j=E(\sqrt{n})^2}^n (E(\sqrt{j})) = (n - N + 1)\sqrt{N} \dots$$

# Fiche I3 – Informatique

- La jointure interne INNER JOIN s'écrit plus simplement « JOIN ».

# Fiche P1 – Mécanique du point

## Exercices d'application et grands classiques

### 6. Terre

Forces de marée  $\vec{F}$  (système  $S$  : Lune : 2 sur élément en  $M$  de l'océan terrestre : 1) :

$$\vec{R} = \vec{O}_L \vec{O}_T, \vec{r} = \vec{O}_T \vec{M}, \text{ force rel. } \rightarrow 1 : \vec{F}_{r(1)} = \vec{F}_1 - \vec{F}_{1e(1)} = -Gm_1 m_2 \left( \frac{(\vec{R} + \vec{r})}{(R^2 + 2\vec{r}\vec{R} + r^2)^{3/2}} - \frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$

$$\rightarrow \vec{F} = \vec{F}_{r(1)} - \vec{F}_{1e(S)} = \vec{F}_{r(1)} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{F}_{r(1)} = \frac{-Gm_1 m_2}{1 + m_1/m_2} \left( \frac{(\vec{R} + \vec{r})}{(R^2 + 2\vec{r}\vec{R} + r^2)^{3/2}} - \frac{\vec{R}}{R^3} \right).$$

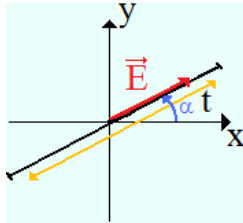
$$\text{On néglige } m_1 (\ll m_2) \text{ et } r \ll R \rightarrow \text{à l'ordre 2 en } r/R, \vec{F} = \frac{-Gm_1 m_2}{R^3} \left( \vec{r} - \frac{3\vec{R}(\vec{R}\vec{r})}{R^2} \right).$$



# Fiche P10 – Ondes lumineuses

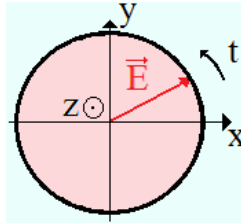
## Définitions et variables

- Polarisations d'ondes planes** (propagation du champ électrique selon l'axe Oz)  
*(a, b, ω, k, E<sub>0</sub> ∈ ℝ<sub>+</sub><sup>\*</sup>)*



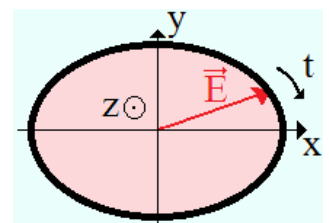
**Rectiligne (linéaire)**

$$\vec{E} = E_0 \begin{cases} a \cdot \cos(\omega t - kz) \\ b \cdot \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{cases}$$



**Circulaire gauche**

$$\vec{E} = E_0 \begin{cases} a \cdot \cos(\omega t - kz) \\ a \cdot \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{cases}$$



**Elliptique droite**

$$\vec{E} = E_0 \begin{cases} a \cdot \cos(\omega t - kz) \\ -b \cdot \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{cases}$$

# Fiche P11 – Ém dans le vide et milieux conducteurs

## Formules, propriétés

- Relations de géométrie différentielle** ( $\forall \vec{X}, \vec{Y}, U$ )
  - Pour  $C$  entourant (sens + /  $\vec{S}$ )  $S$ ,  $\oint_C \vec{X} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{X} \cdot d\vec{S}$  : Th. de (Stokes)

- Onde incidente sur une interface** entre deux milieux, 1 et 2 (**I1/2**) :

(MG)  $\rightarrow \vec{E}_{2,\perp} - \vec{E}_{1,\perp} = (\sigma_1/\epsilon_0) \vec{n}_{1-2}$  : (1) (MF)  $\rightarrow \vec{E}_{2,||} - \vec{E}_{1,||} = \vec{0}$  : (3)

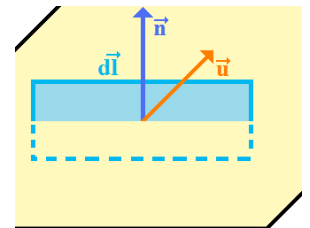
(MD)  $\rightarrow \vec{B}_{2,\perp} - \vec{B}_{1,\perp} = \vec{0}$  : (2) (MA)  $\rightarrow \vec{B}_{2,||} - \vec{B}_{1,||} = \mu_0 J_{S,l} \times \vec{n}_{1-2}$  : (4)

*Dém* :  $C$  : contour rectangulaire, en bleu, entre les milieux 1, en bas et 2, en haut, de largeur  $l$ , de hauteur  $h$ , entourant la surface  $S$ . Avec (MF),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot d\vec{l} = \lim_{h \rightarrow 0} \iint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{E}_{2,||} = \vec{E}_{1,||} : (3). \text{ Avec (MA), } \lim_{h \rightarrow 0} \iint \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\rightarrow \vec{B}_{2,||} - \vec{B}_{1,||} = \mu_0 \vec{J}_{S,l} \times \vec{n}_{1-2} : (4)$$



# Fiche P21 – Physique du solide

## Exercices d'application et grands classiques

Énoncés :

- 2. Réseau carré plan ( $xOy$ ) de côté  $a$  formé d'atomes de masse  $m$

Pour des interactions supposées constantes et limitées aux premiers voisins, les seuls termes de potentiel non nuls étant (à chaque atome correspond deux indices) :

$$\phi^{zz}(\vec{R}_{i,j} - \vec{R}_{i\pm 1,j}) = \phi^{zz}(\vec{R}_{i,j} - \vec{R}_{i,j\pm 1}) = C = \text{cste}, \dots$$

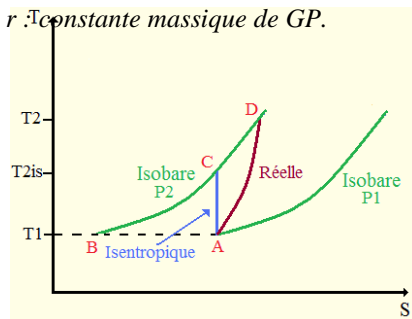
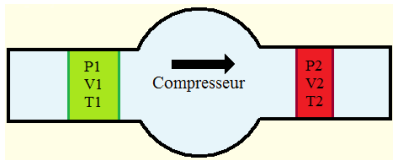
# Fiche P22 – Thermodynamique

## Exercices d'application et grands classiques

Énoncés :

- 5. Compresseur de GP (d'après ENSI)

Travail fourni par le moteur à l'air (considéré GP) :  $W'$ , chaleur échangée avec l'extérieur  $Q$ ,  $c_v$ ,  $c_p$  : capacités massiques,  $r$  : constante massique de GP.



Rendement du travail utile adiabatique – réversible / réel :

$$\eta = W'_{\text{adia-rév}} / W'_{\text{réel}}.$$

On néglige les variations d'énergies potentielle et cinétique macroscopique.

Montrer que :  $W' = \int_1^2 V dP + \int_1^2 T \delta S_{\text{produite}}$ .

$$\eta = c_p(T_{2\text{-Laplace}} - T_1) / c_p(T_2 - T_1) = ((P_2/P_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1) T_1 / (T_2 - T_1).$$

Sur le diagramme (T, S), déterminer  $W'_{\text{réel}}$  et  $W'_{\text{adia-rév}}$ .

Avec un refroidissement intermédiaire isobare réversible :

$$(P_1, T_1) \xrightarrow{\text{Isentropique, } W_1'} (P_1', T_1') \xrightarrow{\text{Isobare, } W_2'} (P_1', T_1) \xrightarrow{\text{Isentropique, } W_3'} (P_2, T_2)$$

En notant  $x_1 = P_1' / P_1$ ,  $x_2 = P_2 / P_1'$ , déterminer  $W'$  dans ce cas et comparer.

## Fiche P25 – Introduction à la mécanique quantique

### Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Étude** dans un **repère cartésien** ( $O, x, y, z$ ) du **comportement** d'une **particule libre** dans un **volume cubique** de **côtés**  $L_1 = L_2 = L_3 = L$ .  $V = L^3$ . ...

L'évolution des **états stationnaires** ( $\psi_{particule}(x, y, z, t_0) = |0\rangle$ ) est alors (Cf. (U)) :

$$\Psi_{particule}(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{8}{V}} \sum_{n_1, n_2, n_3 \geq 1} \langle 0 | n_1 n_2 n_3 \rangle \sin\left(\frac{\pi n_1 x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n_2 y}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi n_3 z}{L}\right) \cdot \exp\left(\frac{-i}{\hbar} E_{n_1, n_2, n_3} (t - t_0)\right) |0\rangle.$$

## Fiche C8 – Thermochimie

### Définitions et variables

- **Point triple** : point (*unique*) du **diagramme de phase température – pression** d'une **substance chimique pure** où **trois phases sont présentes**. La **variance**  $y$  est **nulle**.  
*Le point triple de l'eau servait ainsi de référence pour le kelvin.*  
Pour les **corps purs**, les **trois phases** sont **solide, liquide** et **gaz**.  
*Les corps purs solides ayant des formes allotropiques peuvent également former des points triples avec deux ou trois phases solides.*

# Unités du Système International

(**1** : avant 2018, **2** : révision de 2018)

## Unités de base :

. **Seconde (s)** : **1.** durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. **2.** La seconde, unité de temps du SI, est définie en prenant la fréquence de transition hyperfine de l'état fondamental de césium 133 non perturbé, à (la valeur numérique de)  $\Delta\nu_{Cs} = 9192631770 \text{ s}^{-1}$  (Hz).

. **Mètre (m)** : **1.** longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant  $1/299\,792\,458$  de seconde. **2.** Le mètre, unité de longueur du SI, est défini en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide,  $c$  à  $299\,792\,458$  exprimée en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , la seconde étant définie ci-dessus.

. **Kilogramme (kg)** : **1.** masse du prototype en platine iridié du Bureau International des Poids et Mesures. **2.** Le kilogramme, unité de masse du SI, est défini en prenant la valeur numérique fixée de la constante de Planck,  $h$  à  $6,62607015\cdot 10^{-34}$  exprimée en  $\text{J}\cdot\text{s}$ , unité égale à  $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ , le mètre et la seconde étant définis ci-dessus.

. **Ampère (A)** : **1.** intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et distants de un mètre dans le vide, produit entre eux une force linéique de  $2\cdot 10^{-7} \text{ N/m}$  ( $2\cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-2}$ ). **2.** L'ampère (A), unité de courant électrique du SI, est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire,  $e$  à  $1,602176634\cdot 10^{-19}$  exprimée en coulomb C, unité égale à  $\text{A}\cdot\text{s}$ , la seconde étant définie ci-dessus.

. **Kelvin (K)** : **1.**  $1/273,16$  de la température thermodynamique du point triple de l'eau. **2.** Le kelvin, unité de température thermodynamique du SI, est défini en prenant la valeur numérique fixée de la cste de Boltzmann,  $k_B$  à  $1,380649\cdot 10^{-23}$  exprimée en  $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ , unité égale à  $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ , le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis ci-dessus.

. **Candela (cd)** : **1.** intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence  $540\cdot 10^{12} \text{ Hz}$  ( $\text{s}^{-1}$ ) et d'intensité énergétique dans cette direction de  $1/683 \text{ W}$  ( $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$ ) par stéradian (sr). **2.** La candela, unité du SI d'intensité lumineuse dans une direction donnée, est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence  $540\cdot 10^{12} \text{ Hz}$ ,  $K_{cd}$  à 683 exprimée en  $\text{lm}\cdot\text{W}^{-1}$ , unité égale à  $\text{cd}\cdot\text{sr}\cdot\text{W}^{-1}$ , soit  $\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^3\cdot\text{cd}\cdot\text{sr}$ , le kilogramme, le mètre et la seconde étant définis ci-dessus.

. **Mole (mol)** : **1.** quantité de matière d'un ensemble d'autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 12 grammes de carbone 12. **2.** La mole est l'unité de quantité de matière du SI. Elle contient  $6,02214076\cdot 10^{23}$  (nombre d'Avogadro) entités élémentaires. valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro,  $N_A$  exprimée en  $\text{mol}^{-1}$ .

# MÉMO DES CONCOURS D'ENTRÉE AUX GRANDES ÉCOLES D'INGÉNIEURS

*Fiches de cours, TP et exercices  
en mathématiques, physique et chimie*

*Édition 2021*

## ***Errata et bonus***

***Filière MPSI / MP :***



***Filière PCSI / PC :***



***Filière MPSI, PCSI, PTSI / PSI :***



***Compléments :***



# Fiche M2 – Nombres complexes

## Travaux pratiques et approche expérimentale

- **Fonction logarithme complexe  $\log z$**

Cp<sup>t</sup>

$L(z) = L(x + iy) = \mathbf{\log(x + iy)}$  est une fonction **holomorphe** (dérivable) sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ .

En intégrant  $\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-z)^k$  de la série  $\sum (-z)^n$  sur le disque de son rayon de convergence 1, on obtient  $\log(1+z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}$  (valable également pour  $|z|=1$ ).

On peut étudier  $L(z) = \int_0^1 \partial f(z, t) / \partial z / f(z, t) dt$ , pour  $f(z, t) = 1 + z(t-1)$ .

## Exercices d'application et grands classiques

**Énoncés :**

- **5.** Résolution de  $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = 1$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathbb{C}$ .  
 Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit le polynôme  $P_n(X) = (X+1)^{2n} - (X-1)^{2n} \in \mathbb{C}[X]$ .  
 (Cf. fiche M17 – Polynômes)  
 Exprimer pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n(X)$  en une **somme de monômes**.  
 Déterminer les **racines** de  $P_n$  puis **factoriser**  $P_n(X)$ .  
 En déduire  $\sum_{p=1, p \neq n}^{2n} \tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$  et  $\prod_{q=1, q \neq n}^{2n-1} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right)$ .

**Corrigés :**

- **5. (1)**  $\rightarrow \forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ ,  $\frac{1+z}{1-z} = e^{i\frac{2k\pi}{2n}} \rightarrow z \neq 1$  et  $1+z = (1-z)e^{i\frac{k\pi}{n}} \rightarrow e^{i\frac{k\pi}{n}} \neq -1, z \neq 1$

et  $z = \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1}{e^{i\frac{k\pi}{n}} + 1} \rightarrow$  Divisant numérateur et dénominateur par  $e^{i\frac{k\pi}{2n}}$ ,  $z = \frac{e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}}}{e^{i\frac{k\pi}{2n}} + e^{-i\frac{k\pi}{2n}}}$ .

Donc,  $z = i \cdot \sin \frac{k\pi}{2n} / \cos \frac{k\pi}{2n} = i \cdot \tan \frac{k\pi}{2n}$ , pour  $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \setminus \{n\}$  ( $e^{i\frac{k\pi}{n}} = -1$  étant exclu.)

On déduit donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $2n - 1$  **racines complexes** et **distinctes** du polynôme  $P_n$  qui a pour degré  $2n - 1$  car le coefficient en  $2n$  est nul (en  $2n - 1$ , le coefficient est  $4n$ ) :

$\{\alpha_p = i \tan(p\pi/2n), p \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \setminus \{n\}\}$  et sa **factorisation** :  $P_n(X) = 4n \prod_{p=1, p \neq n}^{2n} (X - \alpha_p)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n(X) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (1 - (-1)^{2n-k}) X^k = 2 \sum_{k=0, 2n-k \text{ impair}}^{2n-1} \binom{2n}{k} X^k$ . Donc, en **identifiant** pour  $n \in \mathbb{N}^*$  les **coefficients** des **deux formes** de chaque polynôme  $P_n$ ,

En  $X^{2n-2} \rightarrow \sum_{p=1, p \neq n}^{2n} \tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right) = 0$ . On retrouve la symétrie de  $\mathcal{C}_{\tan}$  par rapport à  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ .

En  $X^1 \rightarrow \sum_{p=1, p \neq n}^{2n} \prod_{q=1, q \neq n, q \neq p}^{2n} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right) = \prod_{q=1, q \neq n}^{2n-1} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right) = 2 \binom{2n}{1} (-1)^{n-1} / 4n$ .

$\rightarrow$  On obtient  $\prod_{q=1, q \neq n}^{2n-1} \tan\left(\frac{q\pi}{2n}\right) = (-1)^{n-1}$ . Môme remarque et  $\tan(\pi/2 - x) = \cotan x$

# Fiche M8 – Suites réelles et étude de suites

## Exercices d'application et grands classiques

Énoncés ( $n \in \mathbb{N}$ ) :

- 12.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E_n = \{\mathbf{u}(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}, \sum_{k=1}^n u_k = 1\}$ ,  $f_n : \mathbf{u} \mapsto \frac{\prod_{i=1}^n u_i}{\prod_{i=1}^n (1-u_i)}$   
Exprimer, s'il existe,  $s_n = \sup_{\mathbf{u} \in E_n} f_n(\mathbf{u})$ .

Corrigés :

- 12.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $s_n$  est bien défini : le dénominateur de  $f_n$  et  $f_n$  sont strictement positifs,  $f_n$  continue sur l'ouvert borné  $E_n$  et la limite de  $f_n$  aux bords de  $E_n$  est nulle (finie). Dans l'expression de  $f_n$ , chaque  $u_i$  est interchangeable avec  $u_{j \neq i}$ , symétrie du problème pour le sup qui est atteint dans  $E_n$ . Donc, il existe  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^{*n}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $s_n = f_n((a_n, \dots, a_n)) > 0$ . D'où,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = 1/n$ , puis  $s_n = (n-1)^{-n}$ .

# Fiche M12 – Dénombrement, lois discrètes

## Travaux pratiques et approche expérimentale

- Nombre de dérangements (Cf. fiche M10)

...

La série entière  $S_n : \sum \frac{D_n}{n!} x^n$  est bien définie et a un rayon de convergence  $R_s \geq 1$  car  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq D_k \leq k!$ . On note sa somme  $S$ . (0)  $\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^n \frac{D_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = 1$ , étant le  $n^{\text{ème}}$  coefficient du produit de Cauchy de  $\sum \frac{D_n}{n!} x^n$  et  $\sum \frac{x^n}{n!}$ . On déduit pour  $|x| < 1$ , qu'en passant aux sommes,  $S(x)e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1/(1-x)$ , puis  $S(x) = e^{-x}/(1-x)$ . On retrouve (1) et en passant à la limite en  $+\infty$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $e^{-1} = \frac{D_n}{n!} + R_n$ , où  $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|n! R_n| \leq \frac{1}{2}$ , puis  $D_n = E\left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right)$ . Et  $R_s = e$ .

# Fiche M14 – Algèbre linéaire – Morphismes

## Définitions (Cf. fiche M15)

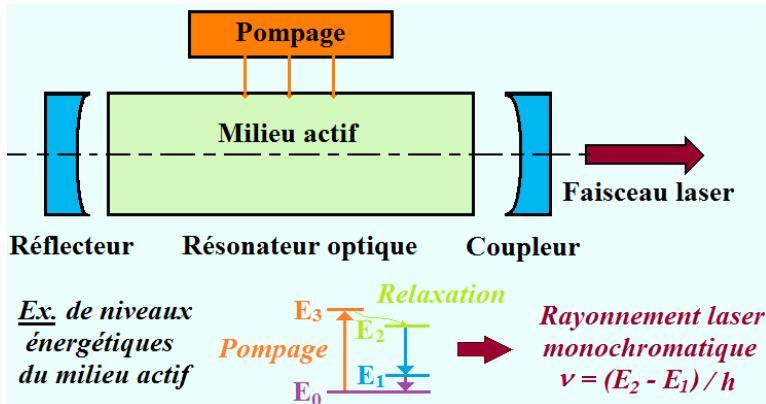
Algèbre linéaire et multilinéaire ( $E, F$   $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dim. finies  $n, p \in \mathbb{N}^*$ )

- $E$ , muni d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ , est un espace euclidien. (Cf. fiche M16)  
Base orthogonale,  $\mathcal{B}_o = (o_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  base de  $E / \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, (o_i | o_j) = 0$ .  
Base orthonormée,  $\mathcal{B} = (e_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  base de  $E / \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (e_i | e_j) = \delta_{ij} \dots$

# Fiche P10 – Ondes lumineuses

## Définitions et variables

- Laser** : appareil générant une **lumière cohérente** avec **amplification** par **émission stimulée** de **rayonnement**. Le faisceau est donc **monochromatique** ( $\lambda$ ).  
*La transmittance ( $\lambda$ ) du coupleur contrairement à celle du réflecteur n'est pas nulle.*

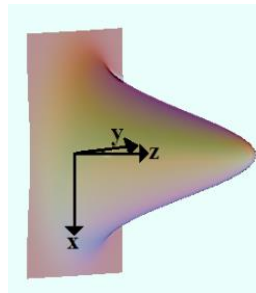


**Propagation du faisceau laser** en fonction de la distance à l'axe optique ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) :

Largueur du faisceau gaussien (*waist*) en  $z$  :  
 $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (\lambda z / \pi w_0^2)^2}$

Intensité moyenne temporelle (en  $W \cdot m^{-2}$ )

$$I = I_0 (w_0 / w(z))^2 e^{-2r^2 / w^2(z)}$$



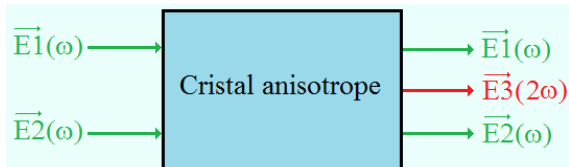
## Exercices d'application et grands classiques

- 11. Optique non linéaire (d'après ENS, cf. fiche P12)

$$\vec{E}_1(\omega) = \underline{E}_1(z) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_1$$

$$\vec{E}_2(\omega) = \underline{E}_2(z) \cdot e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_2$$

$$\vec{E}_3(2\omega) = \underline{E}_3(z) \cdot e^{j(2\omega t - kz)} \vec{e}_3$$



$$\Delta k = 0 \rightarrow n_3 \cdot 2\omega/c - n_1 \cdot \omega/c - n_2 \cdot \omega/c = 0 \rightarrow 2n_3 = n_1 + n_2$$

En considérant les indices ordinaires et extraordinaires (Cf. (Ei)),

$$n^-(\omega) \leq n^+(\omega) < n^+(2\omega) \text{ et } n^-(\omega) < n^-(2\omega) \leq n^+(2\omega)$$

→ Trois possibilités ( $\leftrightarrow (n_1, n_2, n_3)$ ) de rayons sortant du cristal :

$$(n^+(\omega), n^+(\omega), n^-(2\omega)) \text{ ou } (n^-(\omega), n^+(\omega), n^-(2\omega)) \text{ ou } (n^+(\omega), n^-(\omega), n^-(2\omega))$$



# Fiche P23 – Transferts et diffusion

## Définitions et variables

- Un **transfert thermique (chaleur)** est un **échange d'énergie** d'un système sur un autre en **énergie interne** de nature **thémique** (*agitat° micro.*) hors équilibre thermo. :
  - Conduction thermique** : **propagation** de l'**agitation thermique** ( $\rightarrow$  **énergie cinétique**) d'un corps **chaud** vers un corps **froid** (phénomène **microscopique**).
  - Convection (thermique)** : accompagnant la **conduction** dans un fluide hors d'équilibre, **mouvements** à l'intérieur de celui-ci (phénomène **macroscopique**).
  - Rayonnement** : **absorption / émission** d'**ondes électromagnétiques** (hertziennes, infrarouges, visibles, X,  $\gamma$ , etc.). (Cf. fiche (P11))
- Résistance thermique** (Cf. analogie électrique) : traduit l'opposition thermique d'un corps entre **deux isothermes**, ( $T_1, T_2$ ) où circule un **flux thermique**  $\Phi$  :  
$$R_{Th} = \frac{T_2 - T_1}{\Phi} \text{ en } K.W^{-1}. \text{ Elle peut être } \textit{conductive, convective ou de rayonnement.}$$
- Flux** :  $\Phi$  en  $W$ , **flux surfacique** en  $W.m^{-2}$  de **vecteur courant** de **diffusion** :  $\vec{j}$ .

# Fiche P25 – Introduction à la mécanique quantique

## Travaux pratiques et approche expérimentale

- Intrication quantique** et levée du **paradoxe EPR**. (Cf. fiche P10)

Cp<sup>t</sup>

**État singulet** à partir d'atomes qui se désexcitent en conservant leur moment cinétique total  $\mathbf{J}$ , émettant en **cascade deux photons** simultanément **vers deux côtés op, A et B**. Par **conservation** du  $\mathbf{J}$  de chaque **paire**, les deux **photons (spin  $S = 1$ )** sont tels que  $m_S = +1$  ou bien  $m_S = -1$  correspondant donc à **deux mêmes types d'ondes des deux côtés opposés : circulaire droit ( $|d\rangle$ ) ou bien circulaire gauche ( $|g\rangle$ ) (équiprobables)**. L'**étude statistique** de la **détection** ( $|\leftrightarrow\rangle$  ou  $|\updownarrow\rangle$ ) de chacune des **ondes** en **A** et en **B** après la traversée de **polariseurs rectilignes** d'angles respectifs  $a$  et  $b$  selon ces angles, en utilisant les **inégalités de Bell**, **valide** les prévisions théoriques de la **mécanique quantique** en la rendant **incompatible** avec toute **théorie locale** de **variables cachées** : Le **système** des **paires de photons corrélés** ayant pour **fonction d'onde**  $\Psi$ ,

$$\langle\langle\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B||\Psi\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle\langle\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B||d\rangle_A|d\rangle_B + |g\rangle_A|g\rangle_B)$$

$$\rightarrow \langle\langle\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B||\Psi\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle\langle\updownarrow\rangle_A||d\rangle_A\rangle\langle\langle\updownarrow\rangle_B||d\rangle_B\rangle + \langle\langle\updownarrow\rangle_A||g\rangle_A\rangle\langle\langle\updownarrow\rangle_B||g\rangle_B\rangle)$$

La **probabilité** que  $|\updownarrow\rangle_A|\updownarrow\rangle_B$  se **réalise** est donc  $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i(b-a)}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{i(b-a)}}{\sqrt{2}} \right) \right|^2$

Soit  $P_{\updownarrow\updownarrow} = \cos^2(b-a)/2$  et de même,  $P_{\updownarrow\leftrightarrow} = P_{\leftrightarrow\updownarrow} = \sin^2(b-a)/2$ ,  $P_{\leftrightarrow\leftrightarrow} = P_{\updownarrow\updownarrow}$ .